内容简介

本书是学习数学分析课程的一本极好的指导书.本书的编写顺序与一般的数学教科书同步,本册内容包括级数、函数项级数与幂级数、傅里叶级数、多元函数微分学、隐函数定理及应用、向量函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分.读者可以通过学习它循序渐进地理解和掌握数学分析的概念和方法.本书在归纳内容、释疑解难的基础上,用大量、全面的例题为读者诠释概念、演绎技巧、举证方法,使读者可以更好地融会知识、理解概念、熟悉技巧和掌握方法.因此,读者有必要认真学习本书,通过它化教科书上的抽象概念为自己的切实有用的知识.

希望本书能成为你的良师益友,欢迎你选用本系列丛书.

内 容 简 介

本书是学习数学分析课程的一本极好的指导书.本书的编写顺序与一般的数学教科书同步,本册内容包括级数、函数项级数与幂级数、傅里叶级数、多元函数微分学、隐函数定理及应用、向量函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分.读者可以通过学习它循序渐进地理解和掌握数学分析的概念和方法.本书在归纳内容、释疑解难的基础上,用大量、全面的例题为读者诠释概念、演绎技巧、举证方法,使读者可以更好地融会知识、理解概念、熟悉技巧和掌握方法.因此,读者有必要认真学习本书,通过它化教科书上的抽象概念为自己的切实有用的知识.

希望本书能成为你的良师益友,欢迎你选用本系列丛书.

前　言

数学分析是高等学校 数学专业的主要基础课程. 数学初学者来说,数学分析课程的概念难懂,方法抽象,解题难以入手,思维难以展开. 为了帮助大家学好数学分析,解决学习中的困难,指导学习的方法,提高学习的效率,我们编写了本书.

为了使读者能循序渐进,扎扎实实地从理论上、思维上、方法上掌握数学分析的概念与内容、方法及技巧,我们采用与教材同步、以章节为序的方法,对问题逐个地进行讨论、分析、举例、归纳,在提升知识、解析疑难的基础上,用大量的例题为读者诠释概念、演绎技巧、举证方法,使读者通过例题边分析、边练习、边讨论、边总结,从而更好地融会知识、理解概念、熟悉技巧和掌握方法,将书本上的抽象理论真正化为自己的切实有用的知识,更为后续课程打下良好的数学基础.

本书不像某些重点讲授方法的参考书那样,以问题归类来讨论方法. 因此希望读者学习以后,自己做一些归纳提高、整理加工的工作,以增强自己的实践能力.

数学分析的题目及其解法浩如烟海,编者只能选编其中一小部分比较普遍的和比较典型的献给读者. 有些例题是为了举证方法而选用的,因此不一定是该例的最佳方法. 本书以较多的篇幅来讨论命题的论证,这是数学分析的理论基础,但也用了相当篇幅来叙述计算方法,希望能以此提高读者的计算和证明能力.

本书的编写出版得到了华中科技大学出版社的热心支持和帮助,在此向他们表示衷心的感谢. 在本书写作中,曾参阅了一些作

者关于数学分析问题的著作，我们借此机会向他们表示诚挚的谢意.

由于经验不足和学识所限，本书的失误之处在所难免，望同行和读者热心指正.

孙清华　孙　昊

2003 年 11 月

目　录

第七章　级　　数

无穷级数是数学分析理论的重要组成部分，在应用数学与工程技术中有广泛的应用. 无穷级数又分为数项级数和函数项级数，本书着重研究数项级数中的正项级数、一般项级数以及函数项级数中的幂级数.

第一节　级数的敛散性与正项级数

主要内容

一、级数的敛散性

1. 给定一个数列$\{u_n\}$，则表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为数项级数或无穷级数. u_n 称为级数的一般项.

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

称为上述数项级数的第 n 个部分和，简称部分和.

2. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列$\{S_n\}$有极限 S，即$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，则称无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. S 称为无穷级数的和，记作

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad 或 \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

若$\{S_n\}$没有极限，则称无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

3. 柯西(Cauchy)审敛原理　级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件为：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，使得当$n>N$时，对任意的自然数$p$均有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

推论　级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的必要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

4. 收敛级数的基本性质

(1) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于$S$，$k$为常数，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$也收敛，其和为$kS$.

(2) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$分别收敛于$S$和$T$，$c$，$d$为常数，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(cu_n+dv_n)$也收敛，其和为$cS+dT$.

(3) 去掉、增加或改变级数的有限个项，不改变级数的敛散性.

(4) 对收敛级数的项任意加括号，不改变级数的敛散性，也不改变级数的和.

若加括号后的级数发散，则原级数也发散.

5. 常用结论

(1) 等比级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n=a+aq+\cdots+aq^n+\cdots\ (a\neq 0)$，当$|q|<1$时收敛，当$|q|\geqslant 1$时发散.

(2) 调和级数$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$是发散的.

二、正项级数

若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的一般项$u_n\geqslant 0$，则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数. 负项级

数可以化为正项级数来研究.

1. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是:部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

2. 正项级数的比较原则　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数,如果存在某个 $N > 0$,对一切 $n > N$ 都有 $u_n \leqslant v_n$,则

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

3. 比较原则的极限形式　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数,若 $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$,则

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 有相同的敛散性;

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l = +\infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

4. 达朗贝尔(D′Alembert)比式判别法　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数,且存在某自然数 N_0 及常数 q $(0 < q < 1)$,则

(1) 若对一切 $n > N_0$,有 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 若对一切 $n > N_0$,有 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

5. 比式判别法的极限形式　若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数,且 $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$,则:

(1) 当 $q<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(2) 当 $q>1$ 或 $q=+\infty$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

6. 柯西根式判别法　设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且存在某正数 N_0 及常数 $l>0$，则

(1) 若对一切 $n>N_0$，有 $\sqrt[n]{u_n}\leqslant l<1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(2) 若对一切 $n>N_0$，有 $\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

7. 根式判别法的极限形式　设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$，则：

(1) 当 $l<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(2) 当 $l>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

8. 对极限不存在，而上、下极限存在情形，有以下结论.

设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，则

(1) 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\overline{q}<1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(2) 若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\underline{q}>1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

9. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}=l$，则当 $l<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；当 $l>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

10. 积分判别法　设 $f(x)$ 为 $[1,+\infty)$ 上的非负单调减少函

数，则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与非正常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.

11. 拉贝(Raabe)判别法　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)=r$，则

(1) 当 $r>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 当 $r<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

疑难解析

1. 怎样理解无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛？

答　无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 是无穷多项的和，可能是有限数，也可能是无限数，或者是不确定的数. 如

有限数　$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}+\cdots=2$，

无限数　$1+2+3+\cdots+n+\cdots=+\infty$，

不确定数　$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$.

当和是有限数 S 时，称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S. 否则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

特别要注意的是，级数的和是无限项的和(简称无限和)与有限项的和(简称有限和)有本质区别. 有限和是一定存在的，但无限和不一定存在. 然而，两者又有十分密切的联系，即无限和可以通过有限和的极限表示. 一般地，级数求和要先求部分和 S_n(有限

和)，再求部分和的极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$，确定级数的和 S(无限和）是否存在.

2. 判别正项级数敛散性的条件是否都是充分必要的条件?

答 一切判别正项级数敛散性的条件都是充分条件，但不一定是必要条件.

如对正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l<1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$一定收敛，反之则不一定收敛. 例如

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots$$

是一个收敛的正项级数，但$\frac{u_{n+1}}{u_n}$有两种情形：

$$\frac{1}{3^n}\Big/\frac{1}{2^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

$$\frac{1}{2^{n+1}}\Big/\frac{1}{3^n}=\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{2}\xrightarrow{n\to\infty}\infty.$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$不存在.

方法、技巧与典型例题分析

一、级数的敛散性问题

数项级数敛散性问题是级数研究中的一个基本问题. 由级数的敛散性定义知，判别级数的敛散性实质上是判别级数部分和数列的敛散性，求级数的和就是求级数部分和数列的极限. 因此，研究级数的基本思想方法就是将级数的问题转化为其部分和数列的相应问题. 同时，在实际问题中，我们还需利用已知敛散性的级数和级数的性质来帮助确定级数的敛散性及推断级数的一些性质.

例 1 一弹性小球从高 h_0 处落下，落地后弹起的高度为前次下落高度的一半. 如此往复起落，问小球的起落是否会停止.

解 从理论上讲，小球的起落次数是无穷的.是否停止跳动，要看完成这无数次起落的时间是否是有限的.于是，问题可以归结为一个无穷级数的敛散性问题.

依自由落体基本规律有，$h=\frac{1}{2}gt^2$，所以小球从高 h_0 处落地所需时间为 $t=\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$，小球弹起 $\frac{h_0}{2}$ 再落地所需时间为 $t_1=2\sqrt{\frac{h_0}{g}}$，小球第 i 次弹起再落地所需时间为 $t_i=2\sqrt{\frac{h_0}{2^{i-1}g}}$，于是，小球从开始下落至第 n 次落地所用时间为

$$
\begin{aligned}
T_n &= t+t_1+t_2+\cdots+t_{n-1} \\
&= \sqrt{\frac{2h_0}{g}}+2\sqrt{\frac{h_0}{g}}+2\sqrt{\frac{h_0}{2g}}+\cdots+2\sqrt{\frac{h_0}{2^{n-1}g}} \\
&= \sqrt{\frac{2h_0}{g}}+2\sqrt{\frac{h_0}{g}}\,\frac{1-(1/\sqrt{2})^n}{1-1/\sqrt{2}} \to (4+3\sqrt{2})\sqrt{\frac{h_0}{g}}.
\end{aligned}
$$

故 $T=\lim\limits_{n\to\infty}T_n=(4+3\sqrt{2})\sqrt{h_0/g}$. 由此可知，完成这无数次起落所用的时间是有限的，因此，小球的弹跳过程一定会停止.

例 2 判断下列命题的真伪，给出证明或举出反例.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l\neq 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+|u_n|}$ 发散.

解 (1) 真. 用反证法证明. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，则由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$

收敛知，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty}[(u_n + v_n) - u_n]$ 也收敛. 这与题设矛盾.

(2) 伪. 例如，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ 发散，但是，$\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n + (-1)^{n+1}]$ 收敛.

(3) 伪. 比式判别法的极限形式只对正项级数适用. 例如 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛，令 $v_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{(-1)^n/\sqrt{n}}{(-1)^n/\sqrt{n} + 1/n} = 1 \neq 0.$$

但是，因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，依题(1) 知，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

(4) 真. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+|u_n|} = 1$. 由级数收敛的必要条件知，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+|u_n|}$ 发散.

例 3 证明：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{1}{a}\ (a > 0)$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{2a+2n-1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{1}{a}\ (a > 0)$.

证 利用 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 证明.

(1)
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \cdots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} \\ &= \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}\right) + \left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{a+n-1} - \frac{1}{a+n}\right) \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+n}, \end{aligned}$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{a}$. 所以命题成立.

$$(2)\ S_n=\frac{2a+1}{a(a+1)}-\frac{2a+3}{(a+1)(a+3)}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{2a+2n-1}{(a+n-1)(a+n)}$$

$$=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}\right)-\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}\right)+\cdots+(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{a+n-1}+\frac{1}{a+n}\right)$$

$$=\frac{1}{a}+(-1)^{n+1}\frac{1}{a+n},$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{a}$. 所以命题成立.

例 4 证明：

(1) 若 $b_n\to\infty\ (n\to\infty)$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 发散；

(2) 若 $u_n\to 0\ (n\to\infty)$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_{2k-1}-u_{2k})$ 收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(3) 若 $a_n\to a\ (n\to\infty)$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-a$；

(4) 若 $b_n\to\infty\ (n\to\infty)$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)=\dfrac{1}{b_1}$.

证 利用数列的敛散性研究级数的敛散性.

(1) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=b_{n+1}-b_1\to\infty\ (n\to\infty)$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 发散.

(2) 设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$，$T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(u_{2k-1}+u_{2k})$，则

当 $n=2k$ 时，$S_n=T_k$， $k=1,2,\cdots$，

当 $n=2k-1$ 时，$S_n=T_{k-1}+u_n$， $k=1,2,\cdots$.

故当 $n\to\infty$时，$k\to\infty$，$u_n\to 0$，于是

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{k\to\infty} T_k = \lim_{k\to\infty} T_{k-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(u_{2k-1} + u_{2k}),$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(3) $S_n = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1})$

$= a_1 - a_{n+1} \to a_1 - a \ (n\to\infty, a_{n+1}\to a)$.

(4) $S_n = \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2}\right) + \left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right)$

$= \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}} \to \frac{1}{b_1} \ \left(n\to\infty, \frac{1}{b_{n+1}}\to 0\right)$.

例 5 证明:若 $\lim_{n\to\infty} na_n = a$, $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

证 令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k-1})$

$$= (a_1 - a_0) + (2a_2 - 2a_1) + \cdots + (na_n - na_{n-1})$$

$$= - a_0 - a_1 - \cdots - a_{n-1} + na_n,$$

于是 $\sum_{k=0}^{n-1} a_k = na_n - S_n$. 设 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a - S \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \to a - S.$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

例 6 设级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ 都收敛,证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

证 设 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和分别为 $S_n(1)$, $S_n(2)$ 和 S_n,因为 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ 收敛,有 $\lim_{n\to\infty} S_n(1) = S'$, $\lim_{n\to\infty} S_n(2) = S''$. 显然

$$S_{2m} = S_m(1) + S_m(2), \quad S_{2m-1} = S_m(1) + S_{m-1}(2).$$

于是 $\lim\limits_{m\to\infty}S_{2m}=S'+S''$, $\lim\limits_{m\to\infty}S_{2m-1}=S'+S''$.

依收敛级数的性质,$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S'+S''$,即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

例 7 证明:若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,且

$$a_n\leqslant c_n\leqslant b_n,\ n=1,2,\cdots,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 也收敛.

证 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,由柯西审敛原理,$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N_1\in\mathbf{N}$,使得当 $n>N_1$ 时,有 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon$;$\exists\ N_2\in\mathbf{N}$,使得当 $n>N_2$ 时,有 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}b_k\right|<\varepsilon$.

于是,取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,则当 $n>N$ 时,上面两不等式都成立. 从而

$$-\varepsilon<\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}c_k\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}b_k<\varepsilon,$$

即 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}c_k\right|<\varepsilon$. 故依柯西审敛原理,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛.

例 8 证明:若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(a_n\geqslant 0)$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛.

证 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 因此,当 $n>N_0$ 时,必有 $a_n<1$,从而 $a_n^2<a_n<1$,则

$$A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k^2<\sum_{k=1}^{n}a_k=B_n\to B.$$

所以,$\{A_n\}$ 是单调增加有上界的数列,由此可知,数列 $\{A_n\}$ 收敛,即级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

逆命题不成立. 如$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛, 但是级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$却发散.

如果$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 对一切$p > N$和$q > N$, 恒有$|S_p - S_q| < \varepsilon$, 则称数列$\{S_n\}$为柯西数列. 由柯西审敛原理(见第一章), 柯西数列是收敛数列; 反之, 若数列收敛, 则必为柯西数列. 级数收敛的充分必要条件是: 级数的部分和数列$\{S_n\}$是柯西数列.

例 9　设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 且$a_n > 0$, 证明:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$收敛;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 - a_n}$收敛, $a_n \neq 1$.

证　利用柯西数列证明.

(1) 因$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$也收敛, 记其部分和数列为$\{T_n\}$, 则$\{T_n\}$为柯西数列, 而

$$\sqrt{a_n a_{n+1}} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}),$$

故$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 对一切$p > q > N$, 有

$$|S_p - S_q| = \sum_{k=q+1}^{p} \sqrt{a_k a_{k+1}} \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$$

$$= |T_p - T_q| < \varepsilon.$$

即$\{S_n\}$也是柯西数列, 故级数$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$收敛.

(2) 因级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 故存在$N > 0$, 对一切$n > N$, 有$a_n < 1/2$, 于是

$$0 < \frac{a_n}{1 - a_n} < 2a_n.$$

从而由原级数收敛知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 - a_n}$也收敛.

例 10 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，数列 $\{\lambda_n\}$ 具有性质：存在常数 k，对一切 n，恒有 $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i - \lambda_{i+1}| < k$. 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$ 也收敛.

证 记 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，$T_n = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$，当 $m > n$ 时，有

$$
\begin{aligned}
T_m - T_n &= \lambda_m a_m + \cdots + \lambda_{n+1} a_{n+1} \\
&= \lambda_m (S_m - S_{m-1}) + \cdots + \lambda_{n+1} (S_{n+1} - S_n) \\
&= \lambda_m S_m - \lambda_{n+1} S_n + S_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) + \cdots \\
&\quad + S_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_{n+2}),
\end{aligned}
$$

$$|T_m - T_n| \leqslant |\lambda_m S_m - \lambda_{n+1} S_n| + \sum_{i=n+1}^{m-1} |\lambda_i - \lambda_{i+1}|\,|S_i|.$$

现在来证明 $\{T_m\}$ 是柯西数列.

先证 $\{S_n\}$ 和 $\{\lambda_n\}$ 有界. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，所以 $\{S_n\}$ 有界，即对一切 n，$\exists\, M > 0$，使得 $|S_n| < M$. 又由 $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i - \lambda_{i+1}| < k$ 知，级数 $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i - \lambda_{i+1}|$ 收敛（因为级数单调增加且有上界），故数列 $\{|\lambda_i - \lambda_{i+1}|\}$ 是柯西数列. 因此，$\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists\, N_1 > 0$，使得对一切 $m > n > N_1$，总有

$$\sum_{i=n+1}^{m} |\lambda_i - \lambda_{i+1}| < \frac{\varepsilon}{3M},$$

从而
$$\sum_{i=n+1}^{m-1} |\lambda_i - \lambda_{i+1}|\,|S_i| < \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M = \frac{\varepsilon}{3}. \qquad ①$$

又
$$
\begin{aligned}
|\lambda_i - \lambda_1| &= |(\lambda_n - \lambda_{n-1}) + (\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}) + \cdots + (\lambda_2 - \lambda_1)| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_i - \lambda_{i+1}| < k,
\end{aligned}
$$

即对一切 n，有 $|\lambda_n| < k + |\lambda_1| = L$.

由 $\sum\limits_{i=n+1}^{m}|\lambda_i-\lambda_{i+1}|\leqslant\frac{\varepsilon}{3M}$ 还可得到

$$|\lambda_m-\lambda_{n+1}|=|(\lambda_m-\lambda_{m-1})+\cdots+(\lambda_{n+2}-\lambda_{n+1})|$$
$$\leqslant\sum_{i=n+1}^{m-1}|\lambda_i-\lambda_{i+1}|<\frac{\varepsilon}{3M}.$$

由于 $\{S_n\}$ 是柯西数列，故 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N_2>0$，使得对一切 $m>n>N_2$，总有 $|S_m-S_n|<\frac{\varepsilon}{3L}$. 于是，对一切 $m>n>N=\max\{N_1,N_2\}$，总有

$$|\lambda_m S_m-\lambda_{n+1}S_n|=|\lambda_m(S_m-S_n)+(\lambda_m-\lambda_{n+1})S_n|$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\frac{2\varepsilon}{3}. \qquad ②$$

将式①、式②代入 $|T_m-T_n|$ 式，得 $|T_m-T_n|<\varepsilon$.

故 $\{T_n\}$ 是柯西数列，于是知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n$ 收敛.

由本例命题立即可以得到阿贝尔(Abel)判别法：

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，数列 $\{\lambda_n\}$ 单调有界，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n$ 收敛.

例 11 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界，即 $\exists\ M>0$，使得对一切 $|S_n|<M$. 在数列 $\{\lambda_n\}$ 满足 $|S_m-S_n|<\varepsilon/(3L)$ $(\forall\ \varepsilon>0, \exists\ N>0$，当 $m>n>N$ 时，而 $|\lambda_n|<L)$ 且 $\lambda_n\to 0$ 时，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n$ 收敛.

证 同例 10 可证得

$$|T_m-T_n|\leqslant|\lambda_m S_m-\lambda_{n+1}S_n|+\sum_{i=n+1}^{m-1}|\lambda_i-\lambda_{i+1}||S_i|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

及
$$\sum_{i=n+1}^{m-1}|\lambda_i-\lambda_{i+1}||S_i|<\frac{\varepsilon}{3}. \qquad ③$$

又由题设 $\lambda_m\to 0$ 知，$\exists\ N>0$，当 $m>n>N$ 时，$|\lambda_m|$ 和 $|\lambda_n|$ 均小于 $\varepsilon/(3M)$，从而

$$|\lambda_m S_m - \lambda_{n+1} S_n| \leqslant |\lambda_m||S_m| + |\lambda_{n+1}||S_n| < 2\varepsilon/3. \qquad ④$$

将式③、式④代入$|T_m - T_n|$式，得$|T_m - T_n| < \varepsilon$.

故$\{T_n\}$是柯西数列，于是知$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$收敛.

由本例命题立即可得狄利克雷(Dirichlet)判别法：

若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的部分和数列有界，数列$\{\lambda_n\}$单调且$\lambda_n \to 0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$收敛.

例 12 试用狄利克雷判别法确定下列级数的敛散性：

(1) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$;

(2) $\{\lambda_n\}$单调且$\lambda_n \to 0$，$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin n\theta$，$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos n\theta$ $(\theta \neq 2k\pi)$.

解 (1) 因为级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$的部分和$\{S_n\}$有界，取$\lambda_n = 1/n$，则$\{\lambda_n\}$单调且$\lambda_n \to 0$. 由狄利克雷判别法知级数收敛.

(2) $\{\lambda_n\}$单调且$\lambda_n \to 0$，又有

$$S_n = \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta = \left[\sin\frac{n+1}{2}\theta \sin\frac{n}{2}\theta\right] \Big/ \sin\frac{\theta}{2},$$

$$T_n = \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta$$

$$= \left[\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right] \Big/ \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

均有界. 依狄利克雷判别法，两级数均收敛.

例 13 设$a_n > 0$，证明：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

收敛.

证 用收敛的定义证明. 因为

$$\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

$$=\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)},$$

所以 $$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)}$$
$$=\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}.$$

又 $a_n>0$,故 $\{S_n\}$ 单调减少且有下界,故收敛. 从而级数收敛.

例 14 求下列级数的和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}[x^{2^n}/(1-x^{2^{n+1}})],0<x<1$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty}\arctan\frac{2}{4n^2-4n+1}$.

解 本例的解法称为连锁消去法. 即,将通项分解,利用前后项连锁相消的方法求出部分和 S_n,再取 $n\to\infty$ 时 S_n 的极限,求级数的和.

$$(1)\ S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{2},$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ 的和是 $\frac{1}{2}$.

$$(2)\ S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{4},$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 的和是 $\frac{1}{4}$.

(3) $S_n = \sum_{k=0}^{n}[x^{2^k}/(1-x^{2^{k+1}})]$

$$= \sum_{k=0}^{n}[1/(1-x^{2^k}) - 1/(1-x^{2^{k+1}})]$$

$$= \frac{1}{1-x} - 1/(1-x^{2^{n+1}}) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{x}{1-x},$$

故级数 $\sum_{n=0}^{\infty}[x^{2^n}/(1-x^{2^{n+1}})]$ $(0 < x < 1)$ 的和是 $\frac{x}{1-x}$.

(4) 由公式 $\arctan\frac{x-y}{1+xy} = \arctan x - \arctan y$ 知

$$\arctan\frac{1}{2k^2} = \arctan\frac{1}{2k-1} - \arctan\frac{1}{2k+1},$$

$$\arctan\frac{2}{4k^2-4k+1} = \arctan\frac{1}{2(k-1/2)^2}$$

$$= \arctan\frac{1}{2(k-1/2)-1} - \arctan\frac{1}{2(k-1/2)+1},$$

得
$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\arctan\frac{1}{2k-1} - \arctan\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$= \arctan 1 - \arctan\frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\pi}{4}.$$

$$T_n = \sum_{k=2}^{n}\left[\arctan\frac{1}{2(k-1/2)-1} - \arctan\frac{1}{2(k-1/2)+1}\right]$$

$$= \arctan\frac{1}{2\cdot 3/2-1} - \arctan\frac{1}{2(n-1/2)+1} \xrightarrow{n\to\infty} \arctan\frac{1}{2}.$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$ 的和是 $\frac{\pi}{4}$，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\arctan\frac{1}{4n^2-4n+1}$ 的和是 $\arctan\frac{1}{2}$.

例 15 计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})$ 的和.

解 仍用连锁消去法.

$$S_n = (1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{4})$$
$$+ (\sqrt{3} - 2\sqrt{4} + \sqrt{5}) + \cdots + (\sqrt{n-1} - 2\sqrt{n}$$

$$+\sqrt{n+1})+(\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})$$

$$=1-\sqrt{2}-\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$$

$$=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}\xrightarrow{n\to\infty}1-\sqrt{2},$$

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})$的和是$1-\sqrt{2}$.

例 16 计算下列级数的和：

(1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$;

(2) $\frac{8}{3}+\frac{11}{3^2}+\frac{14}{3^3}+\cdots+\frac{3n+5}{3^n}+\cdots$.

解 可用组合法计算，即利用S_n与aS_n的组合(适当选取$a\neq 0$)，求出S_n，再求出S.

(1) $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n}$,

$$2S_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}},$$

于是 $S_n=2S_n-S_n=1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}$

$$=1+\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{2n-1}{2^n}\xrightarrow{n\to\infty}3,$$

所以原级数的和是 3.

(2) $S_n=\frac{8}{3}+\frac{11}{3^2}+\frac{14}{3^3}+\cdots+\frac{3(n-1)+5}{3^{n-1}}+\frac{3n+5}{3^n}$,

$$\frac{1}{3}S_n=\frac{8}{3^2}+\frac{11}{3^3}+\frac{14}{3^4}+\cdots+\frac{3(n-1)+5}{3^n}+\frac{3n+5}{3^{n+1}},$$

$$\frac{2}{3}S_n=\frac{8}{3}+3\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)-\frac{3n+5}{3^{n+1}}$$

$$=\frac{8}{3}+3\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^n}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{3}\right)-\frac{3n+5}{3^{n+1}},$$

$$S_n=4+\frac{27}{4}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{3}{2}\cdot\frac{(3n+5)}{3^{n+1}}\xrightarrow{n\to\infty}4+\frac{3}{4}=\frac{19}{4},$$

所以原级数的和是$\frac{19}{4}$.

类似地,利用$S_n=2S_n-S_n$,可求出$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$的和是2;利用$(1-e^{-x})S_n$,可求出$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$的和是$e^{-x}/(1-e^{-x})^2$.

例 17 计算:

$$q\cos\alpha+q^2\cos2\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha+\cdots\quad(|q|<1).$$

解 建立关于S_n的方程式,解出S_n,再求S_n的极限.因为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}q^k\cos k\alpha,$$

$$\begin{aligned}2q\cos\alpha S_n&=\sum_{k=1}^{n}2q^{k+1}\cos\alpha\cos k\alpha\\&=\sum_{k=1}^{n}q^{k+1}[\cos(k+1)\alpha+\cos(k-1)\alpha],\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}2q\cos\alpha S_n=&[q^{n+1}\cos(n+1)\alpha+S_n-q\cos\alpha]\\&+[q^2+q^2S_n-q^{n+2}\cos n\alpha],\end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{q^{n+2}\cos n\alpha-q^{n+1}\cos(n+1)\alpha+q\cos\alpha-q^2}{1+q^2-2q\cos\alpha}\\&\xrightarrow{n\to\infty}\frac{q\cos\alpha-q^2}{1+q^2-2q\cos\alpha}.\end{aligned}$$

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n\cos n\alpha$的和是$\frac{q\cos\alpha-q^2}{1+q^2-2q\cos\alpha}$.

类似可得,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n\sin n\alpha$的和是$\frac{q\sin\alpha}{1+q^2-2q\cos\alpha}$.

本例可由复变函数中的欧拉(Euler)公式$e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}q^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)&=\sum_{n=1}^{\infty}(qe^{i\alpha})^n\quad(\text{等比级数})\\&=\frac{q\cos\alpha-q^2+iq\sin\alpha}{1+q^2-2q\cos\alpha}.\end{aligned}$$

比较等式两边的实部与虚部即得两级数的和.

例 18 证明：(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\ln 2$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$，$m\in\mathbf{Z}$.

证 由上册第一章知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=C\ (C\text{ 称为欧拉数}),$$

故有 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+C+\alpha_n\quad(\alpha_n\to 0)$.

当 $n=2m$ 时，有

$$\begin{aligned}S_{2m}&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2m}\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\\&=\ln 2m+C+\alpha_{2n}-\ln m-C-\alpha_n\\&=\ln 2+(\alpha_{2n}-\alpha_n)\xrightarrow{n\to\infty}\ln 2,\end{aligned}$$

当 $n=2m+1$ 时，有

$$S_{2m+1}=S_{2m}+\frac{1}{2m+1}\xrightarrow{n\to\infty}\ln 2.$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\ln 2$.

$$\begin{aligned}(2)\ S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+m}\right)\\&=\frac{1}{m}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right.\\&\quad\left.-\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{m+n}\right)\right],\end{aligned}$$

当 $n>m$ 时，有

$$S_n=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$
-\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{m+n}\right)
$$

$$
=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)-\frac{1}{m}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+m}\right)
$$

$$
\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right).
$$

例 19 已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$,求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的和.

解 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$,而

$$
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{2n-1}-a_{2n}+\cdots,
$$

$$
\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}+\cdots,
$$

故

$$
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=-(a_2+a_4+\cdots+a_{2n}+\cdots)
$$

$$
=-\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=2-5=-3,
$$

所以

$$
\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3+5=8.
$$

例 20 由级数的性质确定下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n}\Big/\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{2^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

解 (1) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\Big/\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{\mathrm{e}}\neq 0$,不满足收敛的必要条件,所以级数发散.

(2) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}\Big/\frac{\pi}{2^n}\cdot\pi=\pi\neq 0$,不满足收敛的必要条件,所以级数发散.

(3) 依拉格朗日(Lagrange)中值定理,有

$$\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{n+\theta}<\frac{1}{n}\ (0<\theta<1).$$

对 n 作不等式和，得

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}>\ln(N+1)\xrightarrow{N\to\infty}\infty,$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

(4) 因为 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n$，所以

$$S_n=\ln(1+n)\xrightarrow{n\to\infty}+\infty.$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 发散.

例 21 用柯西审敛原理证明下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$； (2) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$； (4) $\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin nx}{2^n}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}$.

证 利用柯西审敛原理解题，有时要注意 p 的取法和 N 的取法，取法正确可使证明过程简单.

(1) 因为$\forall\ n,p\in\mathbf{N}$，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\\&<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p+1)(n+p)}\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n},\end{aligned}$$

故只需取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，即有

$$0<\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛.

(2) 由级数正负项的规律性,取 $p=3n$,则

$$
\begin{aligned}
|S_{n+p}-S_n| &= \left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}\right. \\
&\quad \left.+\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}+\cdots+\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right| \\
&> \left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{4n-2}\right| \\
&> \frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}+\cdots+\frac{1}{4n}=n\cdot\frac{1}{4n}=\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

所以,原级数当 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$,$\forall\ n\in\mathbf{N}$,$\exists\ p=3n$,使得$|S_{n+p}-S_n|>\varepsilon_0$,故级数发散.

(3) $\forall\ n\in\mathbf{N}$,取 $p=n$,使得$\forall\ \varepsilon_0<\frac{1}{2}$,则

$$
\begin{aligned}
|S_{n+p}-S_n| &= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} \\
&> \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.
\end{aligned}
$$

所以,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

(4) $\forall\ p\in\mathbf{N}$,有

$$
\begin{aligned}
&|S_{n+p}-S_n| \\
&= \left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{2^n},
\end{aligned}
$$

故$\forall\ \varepsilon>0$,只需取 $N=[\log_2(1/\varepsilon)]+1$,则当 $n>N$ 时,$\forall\ p\in\mathbf{N}$,都有上式成立,即知级数收敛.

(5) $\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N$,当 $n>N$ 时,$\forall\ p\in\mathbf{N}$,有

$$
\begin{aligned}
|S_{n+p}-S_n| &= \left|\frac{\cos(n+1)x}{n+1}-\frac{\cos(n+p+1)x}{n+p}\right. \\
&\quad -\frac{\cos(n+2)x}{(n+1)(n+2)}-\frac{\cos(n+3)x}{(n+2)(n+3)} \\
&\quad \left.-\cdots-\frac{\cos(n+p)x}{(n+p-1)(n+p)}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+p}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)} \\
&\quad +\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=\frac{2}{n+1}\xrightarrow{n\to\infty}0.
\end{aligned}
$$

所以,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}$收敛.

二、正项级数的敛散性问题

正项级数的显著特点是其部分和数列$\{S_n\}$单调增加.因此,如果能确定$\{S_n\}$有上界,级数的敛散性就确定了.判别正项级数敛散性的方法很多,读者只有牢记各个方法的条件与结论,才能运用自如.遇到敛散性不能确定的情形,应另觅良法.

例 22 证明:若$u_n\geqslant 0, u_n\geqslant u_{n+1}$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^k u_{2^k}$收敛.

证 记$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i, T_k=\sum\limits_{j=1}^{n}2^j u_{2^j}$,则$\forall\, n$,总有$k\in\mathbf{N}$,使得$2^{k-1}<n\leqslant 2^k$,所以

$$
\begin{aligned}
S_n &= u_1+u_2+\cdots+u_n\leqslant u_1+u_2+\cdots+u_{2^k} \\
&\leqslant u_1+(u_2+u_3)+(u_4+\cdots+u_7)+\cdots \\
&\quad +(u_{2^{k-1}}+\cdots+u_{2^k-1})+(u_{2^k}+\cdots+u_{2^{k+1}-1}) \\
&\leqslant u_1+2u_2+4u_4+\cdots+2^k u_{2^k}=T_k,
\end{aligned}
$$

而$\forall\, k\in\mathbf{N}$,必有n,使得$2^k<n<2^{k+1}$,所以

$$
\begin{aligned}
S_n &\geqslant u_1+u_2+\cdots+u_{2^k} \\
&= u_1+u_2+(u_3+u_4)+(u_5+\cdots+u_8)+\cdots
\end{aligned}
$$

$$+(u_{2^{k-1}}+\cdots+u_{2^k})$$

$$\geqslant u_1+u_2+2u_4+4u_8+\cdots+2^{k-1}u_{2^k}$$

$$\geqslant\frac{1}{2}(u_1+2u_2+2^2u_4+\cdots+2^ku_{2^k})=\frac{1}{2}T_k.$$

于是，由 $S_n\leqslant T_k\leqslant 2S_n$ 表明两级数的敛散性相同.

例 23 用比较原则确定下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$（$p$ 级数）；

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$；　　(4) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln n/(\sqrt{n}\cdot 2^n)$；　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}/n\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\text{收敛，且 }a_n\geqslant 0\right)$.

解 利用比较原则的关键是选择一个已知敛散性的级数进行比较，常用作比较对象的是等比级数与 p 级数(见本例题(2)).

(1) $2^n\sin\frac{\pi}{3^n}<2^n\frac{\pi}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n\pi$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\pi$ 是收敛级数，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$ 也收敛.

(2) 当 $p>1$ 时，$\frac{1}{n^p}\geqslant 0,\frac{1}{n^p}>\frac{1}{(n+1)^p}$. 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{1}{(2^n)^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2^{p-1})^n}=\frac{1}{2^{p-1}}\Big/\left(1-\frac{1}{2^{p-1}}\right)=\frac{1}{2^{p-1}-1},$$

所以依例 21，p 级数当 $p>1$ 时收敛.

当 $p\leqslant 1$ 时，$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}$，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 p 级数当 $p\leqslant 1$ 时发散.

也可以用加括号的方法来证：

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{7^p}\right)+\cdots$$

$$\leqslant 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{4^p}\right) + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \cdots$$

是公比为 $1/2^{p-1}<1$ 的等比级数，当 $p>1$ 时级数收敛.

还可用积分判别法证明：令 $f(x)=\frac{1}{x^p}$，

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-p}-1}{1-p} \overset{p>1}{=} \frac{1}{p-1}.$$

(3) 当 $p>1$ 时，$\frac{1}{n(\ln n)^p}>0$，且

$$\frac{1}{n(\ln n)^p} > \frac{1}{(n+1)[(\ln(n+1)]^p},$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{1}{2^n(\ln 2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln 2)^p n^p}$ 收敛，依例21结论，级数收敛；当 $p\leqslant 1$ 时级数发散.

(4) 当 n 充分大时，有

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln n\cdot\ln(\ln n)}} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{2\ln n}} = \frac{1}{n^2},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 收敛.

(5) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln n/\sqrt{n} = \lim\limits_{x\to\infty}\ln x/\sqrt{x} = 0$，所以当 n 充分大时，$0<\ln n/\sqrt{n}<1$，即 $0<\frac{\ln n}{2^n\sqrt{n}}<\frac{1}{2^n}$. 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 是收敛级数，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln n/(2^n\sqrt{n})$ 也收敛.

(6) 因为

$$1-\cos\frac{\pi}{n} = 2\sin^2\frac{\pi}{2n} \leqslant 2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{1}{n^2},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 收敛.

(7) 因为 $0<\frac{\sqrt{a_n}}{n}=\sqrt{a_n}\cdot\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{n^2}\right)<a_n+\frac{1}{n^2}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}/n$ 收敛.

例 24 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n{}^2}$，$x_n$ 是方程 $x=\tan x$ 的正根(按递增顺序排列).

解 (1) 直接找可比级数很困难，利用 $\ln(1+x)$ 在 $x=0$(当 $n\to\infty$ 时，$1/n\to 0$)处的二阶泰勒(Taylor)公式，得

$$\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

所以，$\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 与 $\frac{1}{n^2}$ 是同阶无穷小($n\to\infty$)，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 也收敛.

(2) 因为 $x_n\in\left(\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$，$n=1,2,\cdots$，所以

$$x_n>\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi=\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi,$$

$$\frac{1}{x_n{}^2}<\frac{1}{(n-1/2)^2\pi^2}<\frac{1}{n^2},\ n=1,2,\cdots,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n^2}$ 也收敛.

例 25 用比式判别法或根式判别法确定下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ (x>0)$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}\ (a>0)$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2+1/n)^n}$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!a^n}{n^n}\ (a>0)$.

解　比式判别法是最易使用的方法，而根式判别法一般在通项中含因式的 n 次方时才使用. 它们的缺点是，当极限为 1 时无法确定敛散性，需要另辟蹊径.

(1) 用比式判别法. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n+1}=0<1,$$

所以，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ (x>0)$ 收敛.

(2) 用比式判别法. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(2n+1)}=\frac{1}{4}<1.$$

所以，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 收敛.

(3) 用比式判别法. 因为 $a=0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 显然收敛. 当 $a\neq 0$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{1+a^{n+1}}=\begin{cases}a, & 0<a<1,\\ 1/2, & a=1,\\ 0, & a>1.\end{cases}$$

所以，当 $a\geqslant 0$ 时，原级数均收敛.

(4) 用比式判别法. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[2n+3]{2})=\sqrt{2}-1<1,$$

所以，原级数收敛.

(5) 用根式判别法. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2/(2+1/n)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}}{2+1/n}$$

$$= 1/2 < 1,$$

所以,原级数收敛.

(6) 用比式判别法. 因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)!a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\Big/\frac{n!a^n}{n^n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} a\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{a}{\mathrm{e}}.$$

所以,当 $a<\mathrm{e}$ 时,级数收敛;当 $a>\mathrm{e}$ 时,级数发散.

当 $a=\mathrm{e}$ 时,依斯特林(Stirling)公式(见上册):$n! \sim \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$,故 $\frac{n!\ \mathrm{e}^n}{n^n} \sim \sqrt{2\pi n} \to \infty$,所以级数发散.

例 26 证明:$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数,若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$,则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$. 反之不成立.

证 求证根式判别法的适用范围比比式判别法更广泛.

设 $l>0$,$\forall\ \varepsilon>0\ (\varepsilon<l)$,$\exists\ N\in\mathbf{N}$,使得当 $n>N$ 时,有

$$0 < l-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l+\varepsilon,$$

则 $l-\varepsilon<\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}<l+\varepsilon,\ l-\varepsilon<\frac{a_{N+3}}{a_{N+2}}<l+\varepsilon,\cdots,l-\varepsilon<\frac{a_n}{a_{n-1}}<l+\varepsilon.$

将以上不等式对应项相乘,得

$$(l-\varepsilon)^{n-N-1} < \frac{a_n}{a_{N+1}} < (l+\varepsilon)^{n-N-1},$$

$$(l-\varepsilon)^n\frac{a_{N+1}}{(l-\varepsilon)^{N+1}} < a_n < (l+\varepsilon)^n\frac{a_{N+1}}{(l+\varepsilon)^{N+1}},$$

$$(l-\varepsilon)\sqrt[n]{\frac{a_{N+1}}{(l-\varepsilon)^{N+1}}} < \sqrt[n]{a_n} < (l+\varepsilon)\sqrt[n]{\frac{a_{N+1}}{(l+\varepsilon)^{N+1}}},$$

当 $n\to\infty$时,由 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$,可得

$$l-\varepsilon \leqslant \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \leqslant l+\varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l.$$

当 $l=0$ 或 $l=+\infty$ 时,类似可证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$.

反之,可举例说明. 如级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}=\frac{1}{2}<1,$$

所以级数收敛. 但是,若依比式判别法,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+(-1)^{n+1}}{2[2+(-1)^n]}=\begin{cases}3/2,\ n\text{ 为奇数},\\1/6,\ n\text{ 为偶数},\end{cases}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 不存在. 可见,此时比式判别法失效.

例 27 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{1/n}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[1\Big/\int_0^n\sqrt[4]{1+x^4}\mathrm{d}x\right]$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^1 x^2(1-x)^n\mathrm{d}x$,并求和.

解 (1) 因为 $a_n=\int_0^{1/n}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$,有

$$0\leqslant a_n\leqslant\int_0^{1/n}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n^{3/2}}.$$

而级数 $\dfrac{2}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ 是 p 级数, $p>1$,级数收敛,故原级数收敛.

(2) 因为 $0<a_n<1\Big/\int_0^n x\mathrm{d}x=\dfrac{2}{n^2}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛,所以原级数收敛.

(3) 因为 $a_n=\int_0^1 x^2(1-x^2)^n\mathrm{d}x=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1/n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}=2.$$

所以原级数收敛.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)-\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{n+3}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{6},$$

故级数的和是 1/6.

例 28 证明导数判别法：设 $f(1/n)=a_n>0, f(0+0)=0$, $f'(x)$在 $x=0$ 的右邻域存在.

若$\exists\ \delta>0$，当 $0<x<\delta$ 时，有$\dfrac{xf'(x)}{f(x)}\geqslant G>1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(1/n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；若$\dfrac{xf'(x)}{f(x)}\leqslant 1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(1/n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

其极限形式是：设 $f(1/n)=a_n>0, f(x+0)=0$. 若 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=G$，则当 $G>1$ 时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；当 $G\leqslant 1$ 时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ca_n(c\neq 0)$ 敛散性相同，且改变有限项不影响级数的敛散性，故不妨设 $a_n=1$，即 $f(1)=1$. 于是

(1) 取 r：使得 $G>r>1$，作辅助函数 $F(x)=\ln f(x)-\ln x^r$，则

$$F'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{r}{x}\ (0<x<\delta).$$

因为$\dfrac{xf'(x)}{f(x)}\geqslant G>r$，即$\dfrac{f'(x)}{f(x)}>\dfrac{r}{x}$，所以 $F'(x)>0$. 从而 $F(x)$在$(0,1]$上严格单调增加. 又 $F(1)=\ln f(1)-\ln 1^r=0$，即得 $F(x)<0$，所以 $f(x)<x^r\Rightarrow a_n=f\left(\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n^r}$. 而 p 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^r}\ (r>1)$ 收敛，从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) 若$\dfrac{xf'(x)}{f(x)}\leqslant 1$,则$\dfrac{f'(x)}{f(x)}\leqslant\dfrac{1}{x}$,作辅助函数 $F(x)=\ln f(x)-\ln x$,有

$$F'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{1}{x}\leqslant 0.$$

从而 $F(x)$ 在$(0,1]$上严格单调减少,$F(x)>F(1)=0\ (0<x<1)$,即 $f(x)\geqslant x$,得 $a_n=f\left(\dfrac{1}{n}\right)\geqslant\dfrac{1}{n}$. 由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 发散.

由导数判别法可得正项级数收敛的一个充要条件:

设 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=a_n>0$,$f''(0)$ 存在,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充要条件是 $f(0)=f'(0)=0$.

例 29 用导数判别法判别下列级数敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2(\ln n)^p}\ (p\in\mathbf{Z}^+)$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$.

解 (1) 令 $f(x)=\dfrac{x^\alpha}{(-\ln x)^p}$,则

$$f'(x)=\frac{\alpha x^{\alpha-1}(-\ln x)^p+kx^{\alpha-1}(-\ln x)^{p-1}}{(\ln x)^{2p}},$$

$$\frac{xf'(x)}{f(x)}=\alpha-\frac{p}{\ln x}\xrightarrow{x\to 0^+}\alpha.$$

由导数判别法的极限形式知,当 $\alpha>1$ 时,原级数收敛;当 $\alpha<1$ 时,原级数发散;当 $\alpha=1$ 时,同例 22 题(3),当 $p>1$ 时收敛,当 $p=1$ 时发散.

(2) 令 $f(x)=1-\cos x$,则 $f'(x)=\sin x$, $f''(x)=\cos x$. 于是 $f(0)=f'(0)=0$, $f''(0)$存在. 由正项级数的导数判别法知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$ 收敛.

例 30 用根式判别法确定下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$，其中$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$a\neq b$，$a,b,a_n>0$.

解　(1) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$，所以，原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$收敛.

(2) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2-1/n}=\frac{1}{9}<1$，所以，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$收敛.

(3) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(b/a_n)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}(b/a_n)=b/a$，所以，当$b<a$时，级数收敛；当$b>a$时，级数发散；当$b=a$时，敛散性不能确定.

例 31　用积分判别法确定下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$；　　(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$.

解　能用积分判别法判别的级数很少，这两例用其它方法已求解过，在此再作判别.

(1) 令$f(x)=\frac{1}{x^p}$，则$\int_1^n\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{n^{1-p}-1}{1-p}$ $(p\neq 1)$.

当$p>1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{1-p}-1}{1-p}=\frac{1}{p-1}$，原级数收敛；

当$p<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{1-p}-1}{1-p}=+\infty$，原级数发散；

当$p=1$时，原级数即调和级数，发散.

(2) 令$f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^p}$，则$f'(x)=-\frac{(\ln x)^p+p(\ln x)^{p-1}}{x^2(\ln x)^{2p}}$，故当$x\geqslant 2$时，$f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$单调减少.

又$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}=\frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_2^{+\infty}$. 当$p<1$时，级数和是

$+\infty$,原级数发散;当 $p>1$ 时,级数和是$\frac{1}{p-1}(\ln 2)^{1-p}$,原级数收敛;当 $p=1$ 时,级数和是 $\ln\ln x\Big|_2^{+\infty}=\infty$,原级数发散.

例 32 用拉贝判别法判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-\lambda\ln n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^{n+p}}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}\ (p,q>0)$;

(5) $\frac{a}{b}+\frac{a(a+d)}{b(b+d)}+\frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)}+\cdots\ (a,b,d>0)$.

解 先求出 $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$,再讨论极限.

(1)
$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{2^{-\lambda\ln n}}{2^{-\lambda\ln(n+1)}}-1\right)=n(2^{\lambda\ln(1+1/n)}-1)$$
$$=n[e^{\ln 2^{\lambda}\cdot\ln(1+1/n)}-1]\text{(等价无穷小代换)}$$
$$\sim n[\ln 2^{\lambda}\cdot\ln(1+1/n)]$$
$$=n[1/n+o(1/n)]\ln 2^{\lambda}\xrightarrow{n\to\infty}\ln 2^{\lambda},$$
故当 $\ln 2^{\lambda}>1$,即 $\lambda>\log_2 e$ 时,级数收敛;当 $\lambda<\log_2 e$ 时,级数发散;当 $\lambda=\log_2 e$ 时,$a_n=2^{-\lambda\ln n}=1/n$,级数是调和级数.

(2)
$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left[\frac{2n(2n+1)}{(2n-1)^2}-1\right]=\frac{n(6n-1)}{(2n-1)^2}$$
$$\xrightarrow{n\to\infty}3/2>1.$$
故知原级数收敛.

(3)
$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p}-1\right]$$
$$=\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p}-1\right]\Big/\frac{1}{n},$$
而
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p}-1\right]\Big/\frac{1}{n}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{e}(1+x)^{1/x+p}-1\right]\Big/x$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{e}\cdot e^{\left(\frac{1}{x}+p\right)\ln(1+x)}-1\right]\Big/x\text{ (利用泰勒公式)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{e}\cdot e^{1+\left(p-\frac{1}{2}\right)x+o(x)}\right]\Big/x=p-\frac{1}{2}.$$

故当 $p-1/2>1$，即 $p>3/2$ 时，级数收敛.

$$(4)\ \lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\left(1+\frac{q}{n+1}\right)-1\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+x)^p\left(1+\frac{qx}{1+x}\right)-1\right]\Big/x$$

$$=p+q,$$

故当 $p+q>1$ 时，级数收敛.

$$(5)\ \lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{b+nd}{a+nd}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)^n}{a+nd}=\frac{b-a}{d},$$

故当$\dfrac{b-a}{d}>1$ 时，级数收敛.

在用拉贝判别法讨论极限时，应特别注意利用等价无穷小代换和泰勒公式.

例 33 证明弗林克(Frink)判别法 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/a_{n-1})^n=k$ 存在，证明：当 $k<1/e$ 时，级数收敛；当 $k>1/e$ 时，级数发散.

证 记 $k=e^{-\lambda}$，则 $\lambda=\ln k$. 若 $k<1/e$，即 $\lambda>1$，于是存在数 s，$\lambda>s>1$. 引入级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{p^s}$，是收敛的 p 级数. 又

$$\frac{b_n}{b_{n-1}}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^s\Rightarrow\left(\frac{b_n}{b_{n-1}}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{ns},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{b_{n-1}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n\cdot(-s)}=e^{-s}>e^{-\lambda}=k.$$

当 N 充分大时，$\forall\ n>N$，有

$$\left(\frac{b_n}{b_{n-1}}\right)^n>\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^n,\quad 即\quad \frac{a_n}{a_{n-1}}<\frac{b_n}{b_{n-1}},$$

依比式判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

若 $k>\frac{1}{\mathrm{e}}$，即 $\mathrm{e}^{-\lambda}>\mathrm{e}^{-1}$. 引入级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，是发散的调和级数. 又

$$\left(\frac{c_n}{c_{n-1}}\right)^n=(1-\frac{1}{n})^s,\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{c_n}{c_{n-1}}\right)^n=\mathrm{e}^{-1}<\mathrm{e}^{-\lambda}=k,$$

当 N 充分大时，$\forall\ n>N$，有

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^n>\left(\frac{c_n}{c_{n-1}}\right)^n,\quad 即\quad \frac{a_n}{a_{n-1}}>\frac{c_n}{c_{n-1}},$$

依比较原则知，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

如果对 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^n=k$ 两边取对数，即得对数判别法：

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，若 $\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}>1$，则级数收敛；若 $\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}<1$，则级数发散.

例 34 用对数判别法确定下列级数敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\ln x}\quad (x>0)$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$.

解 (1) $\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}=\ln x[\ln n-\ln(n+1)]=\ln x\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}n\ln x\cdot\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\ln x\lim_{n\to\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=-\ln x,$$

故当 $-\ln x>1$，即 $x<1/\mathrm{e}$ 时，级数收敛；否则级数发散.

(2) $\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}=\ln\{[\ln(n+1)]^{\ln\ln(n+1)}/(\ln n)^{\ln\ln n}\}$，故 $\exists\ n_0$，当 $n>n_0$ 时，$n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}<1$，所以级数发散.

例 35 证明库默尔(Kummer)判别法　设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 为

两个正项级数. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)>0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<0$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

证 若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)>0$，则$\exists\ N,\forall\ n\geqslant N$有$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\geqslant k>0\Rightarrow\dfrac{a_n}{b_n}-\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\geqslant ka_{n+1}$. 则对$p>q=N$，有

$$\sum_{i=q}^{p-1}\left(\frac{a_i}{b_i}-\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}\right)\geqslant\sum_{i=q}^{p-1}ka_{i+1},$$

即
$$k\sum_{i=q}^{p-1}a_{i+1}\leqslant\frac{a_q}{b_q}-\frac{a_p}{b_p}<\frac{a_q}{b_q}=\frac{a_N}{b_N}\Rightarrow\sum_{i=q}^{p-1}\leqslant\frac{1}{k}\cdot\frac{a_N}{b_N}.$$

于是，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和

$$S_p=a_1+a_2+\cdots+a_N+(a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_p)$$
$$\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_N+\frac{1}{k}\cdot\frac{a_N}{b_N}=M\ (a_N,b_N\text{不随}\ p\ \text{变化}),$$

即$\{S_p\}$单调增加且有上界，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<0$，则$\exists\ N,\forall\ n\geqslant N$，有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\leqslant-k\ (k>0)\Rightarrow\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{1}{b_n}<\frac{1}{b_{n+1}},$$

即
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

依比较判别法知，当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

由库默尔判别法立即可得拉贝判别法(只需取$b_n=1/n$即可证).

例 36 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$为正项级数，证明：

若$\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]\ln n>1$，则级数收敛；

若$\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]\ln n<1$，则级数发散.

证　取$\sum\limits_{n=2}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$，该级数发散(见例 30 题(2))，则

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot n\ln n-(n+1)\ln(n+1).$$

因为$(n+1)\ln(n+1)-(n+1)\ln n=(n+1)\ln(1+1/n)\xrightarrow{n\to\infty}1$，所以

$$\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]\ln n=\frac{a_n}{a_{n+1}}n\ln n-(n+1)\ln n$$
$$>\frac{a_n}{a_{n+1}}n\ln n-(n+1)\ln(n+1)\xrightarrow{n\to\infty}1.$$

依库默尔判别法即得上述命题.

例 37　证明高斯(Gauss)判别法：若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$为正项级数，从某项开始，有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\sigma}{n}+\frac{c_n}{n^{\lambda}},$$

其中$|c_n|<M<+\infty$，$\lambda>1$，σ,λ,M均与n无关，则当$\sigma>1$时，级数收敛；当$\sigma\leqslant1$时，级数发散.

证　将$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=1+\dfrac{\sigma}{n}+\dfrac{c_n}{n^{\lambda}}$代入例 35 式中，得

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]\ln n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sigma+\frac{c_n}{n^{\lambda-1}}-1\right]\ln n=\begin{cases}+\infty>1, & \sigma>1,\\ 0, & \sigma=1,\\ -\infty<1, & \sigma<1,\end{cases}$$

所以，当$\sigma>1$时，级数收敛；当$\sigma\leqslant1$时，级数发散.

例 38　用高斯判别法确定下列级数敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^{-p}}{q(q+1)(q+2)\cdots(q+n)}$ $(p>0, q>0)$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}$

$(p>0, q>0)$.

解 高斯判别法往往与拉贝判别法一起使用. 一般,用来判别参数为定值的敛散性时,还要借助于泰勒公式.

$$
\begin{aligned}
(1)\ &\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(q+n+1)(1+1/n)^p}{n+1}-1\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{q}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{q}{n+1}\right)\frac{(1+1/n)^p-1}{1/n}\right] \\
&\quad + \lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{q}{n+1}\right)-1\right] = p+q.
\end{aligned}
$$

故当 $p+q>1$ 时,级数收敛;当 $p+q<1$ 时,级数发散.

当 $p+q=1$ 时,有

$$
\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \left(1+\frac{q}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-q} \\
&= \left[1+\frac{q}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\left[1+\frac{1-q}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
&= 1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^1+\varepsilon}\right)\ (\varepsilon>0),
\end{aligned}
$$

依高斯判别法知,当 $p+q=1$ 时,级数发散.

$$
\begin{aligned}
(2)\ &\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{n+1}{p+n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^q-1\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{p+n}\frac{(1+1/n)^q-1}{1/n}+\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1}{p+n}-1\right) \\
&= q+1-p.
\end{aligned}
$$

故当 $q+1-p>1$,即 $q>p$ 时级数收敛,当 $q<p$ 时级数发散.

当 $q=p$ 时,级数可以化为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^p},$$

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{n+1}{n+p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p \\
&= \left[1+\frac{1-p}{n}+o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)\right]\left[1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)\right] \\
&= 1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right).
\end{aligned}$$

依高斯判别法知，当 $p=q$ 时，级数发散.

第二节　一般项级数

主 要 内 容

1. 各项符号正负相间的级数

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1}u_n + \cdots \quad (u_n > 0, n = 1,2,\cdots)$$

称为交错级数.

2. 莱布尼茨判别法　若交错级数满足以下条件：

(1) 数列 $\{u_n\}$ 单调减少，　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，

则交错级数收敛.

若交错级数满足莱布尼茨条件，则收敛级数的余项估计式为 $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

3. 若级数 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 各项绝对值组成的级数

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots$$

收敛，则称原级数绝对收敛.

绝对收敛的级数一定收敛.

可用考察正项级数的各种判别法考察绝对值级数的敛散性.

4. 绝对收敛级数的两个重要性质

(1) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛,其和为 S,则任意重排各项后所得级数仍绝对收敛,且其和不变.

(2) 柯西定理　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = A$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = B$ 都绝对收敛,则两级数的每一项的所有可能乘积 $u_i v_j$ 按任意顺序排列所得的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 也绝对收敛,且其和为 AB.

5. 阿贝尔判别法

(1) 阿贝尔变换　设 ε_i, v_i　$(i=1,2,\cdots,n)$ 为两组实数,若令 $\sigma_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_k (k=1,2,\cdots,n)$,则有

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sigma_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\sigma_2 + \cdots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)\sigma_{n-1} + \varepsilon_n \sigma_n.$$

上式又称为分部求和公式.

(2) 阿贝尔引理　若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 为单调数组,且对任一自然数 k $(1 \leqslant k \leqslant n)$,有 $|\sigma_k| \leqslant A$ (σ_k 如(1)所定义),则当

$$\varepsilon = \max\{|\varepsilon_k|\}$$

时,有 $\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_i v_k\right| \leqslant 3\varepsilon A$.

(3) 阿贝尔判别法　若 $\{a_n\}$ 为单调有界数列,且级数 $\sum_{n=1}^{n} b_n$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

6. 狄利克雷判别法　若数列 $\{a_n\}$ 单调减少,且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,又级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和数列有界,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

疑难解析

1. 对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，怎样判别其敛散性？

答 对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，若其绝对收敛，则一定收敛. 因此可将正项级数判别法用于绝对收敛的级数上. 对条件收敛级数，需要更加精细的判别法，如阿贝尔判别法、狄利克雷判别法. 对特殊情形，如交错级数，莱布尼茨判别法是狄利克雷判别法的特殊情形.

2. 绝对收敛级数与条件收敛级数有什么不同的特性？表现在哪些方面？

答 绝对收敛级数与条件收敛级数虽然都是收敛级数，但它们有不同的特性，主要表现在运算上. 绝对收敛级数与有限和有相同的运算律（结合律、交换律、分配律），而条件收敛级数不满足交换律.

若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则可以任意交换 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 各项的位置而不改变其和. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都绝对收敛，且其和分别为 A,B，则乘积 $\sum_{i,j=1}^{\infty}u_iv_j$ 也绝对收敛，其和为 AB.

对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的子级数（数列 $\{u_n\}$ 的子数列形成的级数），绝对收敛级数有以下特性：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛的充要条件是它的一切子级数都收敛.

若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的一切子级数都收敛，可令

$$u_n^+ = \frac{|u_n| + u_n}{2}, \quad u_n^- = \frac{|u_n| - u_n}{2},$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 分别是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的正项部分与负项部分，都是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的子级数，由所设知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 都收敛. 而 $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$，故 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛. 反之，当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛时，由 $0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n|, 0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|$，故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 都收敛. 于是对 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的任一子级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n_k}$，令

$$v_n = \begin{cases} 0, & n \neq n_k, \\ u_{n_k}, & n = n_k, \end{cases}$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n_k}$，且 $0 \leqslant v_n^+ \leqslant u_n^+, 0 \leqslant v_n^- \leqslant u_n^-$. 依比较判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^-$ 都收敛，$|v_n| = v_n^+ + v_n^-$，故 $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_{n_k}|$ 收敛，得 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n_k}$ 收敛.

条件收敛级数有以下特性：若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 都发散到正无穷大.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 有一个收敛，不妨设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 收敛，因 $u_n^+ = \frac{|u_n| + u_n}{2}$，即 $|u_n| = 2u_n^+ - u_n$，由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛. 从而引出矛盾，故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 都发散.

方法、技巧与典型例题分析

对于任意项级数，首先是区别其是否为交错级数，这一般可以由 u_n 的形式确定. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为交错级数，通常可以用莱布尼茨判别法确定其敛散性. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为一般的任意项级数，则可以用正项级数的判别法确定 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 的敛散性，从而判别 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是否绝对收敛. 而条件收敛的判别则比较复杂，一般可使用阿贝尔判别法、狄利克雷判别法.

例 1 讨论下列交错级数的敛散性，并对收敛级数判别是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)^n}{2n^{n+1}}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n^{1/n} - 1)$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}$.

解 本例的级数均为交错级数.

(1) $u_n = (-1)^{n-1} \cdot 1/n^{1/2}$. 满足 $|u_n| \geqslant |u_{n+1}|$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，所以，依莱布尼茨判别法知，级数收敛.

又 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1/2}$ 是 p 级数，$p<1$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 不收敛，即原级数条件收敛.

(2) $u_n = \frac{(n+1)^n}{2n^{n+1}}$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{2},$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，原级数不绝对收敛.

但$\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|}=\frac{(n+1)^n}{2n^{n+1}}\cdot\frac{2(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}}=\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1}>1$，且$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n}=0$，依莱布尼茨判别法，原级数收敛，即原级数条件收敛.

(3) $u_n=(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^n}\cdot\frac{3^{n-1}}{n}=\frac{1}{3}<1,$$

所以，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，即原级数绝对收敛.

(4) 设$a_n=n^{1/n}-1$，则$a_n>0$. 设$f(x)=x^{1/x}$，则

$$\lim_{n\to\infty}f(x)=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^0=1,$$

所以，$|u_n|=a^n\to0$. 又由$f'(x)=(e^{\frac{1}{x}\ln x})'=x^{1/x}\frac{1-\ln x}{x^2}$知，当$x>e$时，$f'(x)<0$. 故当$x>e$时，$f(x)$单调减少，即$a_n>a_{n+1}(n=3,4,\cdots)$，依莱布尼茨判别法知，原级数收敛.

(5) 令$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0\ (x>e)$. 故当$n\geqslant3$时，$\{a_n\}=\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$单调减少，且$a_n\to0$. 依莱布尼茨判别法知，原级数收敛.

又当$n\geqslant3$时，$a_n=\frac{\ln n}{n}\geqslant\frac{1}{n}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散. 故原级数不绝对收敛，所以原级数条件收敛.

(6) $u_n=(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$，而

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n^2}}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 2^n\cdots 2^n}{n(n-1)\cdots 1} = \infty,$$

所以原级数发散.

例 2 讨论下列交错级数的敛散性,并对收敛级数判别是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n-\ln n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n+\ln n}$.

解 (1) $u_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$. 因为

$$\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\Big/\frac{1}{n^{1/2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以,原级数不绝对收敛.

但是,$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}=0$,$\frac{1}{\sqrt{2n+1}}<\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$,所以依莱布尼茨判别法,原级数收敛,即条件收敛.

(2) $u_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n-\ln n}$. 因为$\frac{1}{n-\ln n}>\frac{1}{n}$,而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,所以,原级数不绝对收敛.

又$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$,故

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1-\ln n/n} = 0.$$

又令 $f(x)=x-\ln x$,由 $f'(x)=1-1/x>0$ $(x>0)$,知 $n-\ln n$ 单调增加,即$\frac{1}{n-\ln n}$单调减少. 所以依莱布尼茨判别法知,原级数收敛,即条件收敛.

(3) $u_n=(-1)^{n-1}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$.

当 $p\leqslant 0$ 时,$|u_n|\geqslant 1$,故$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

当 $0\leqslant p\leqslant 2$ 时，令 $u_n=(-1)^{n-1}a_n$，由 $\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p<1$ 易知

$$a_n>\left[\frac{2n+1}{2(n+1)}\right]^p a_n=a_{n+1}(n=1,2,\cdots),$$

而
$$0<a_n<\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)^p\to 0\ (n\to\infty).$$

依莱布尼茨判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

但是，$\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|}=\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p$，依拉贝判别法，有

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{[(2n+2)/(2n+1)]^p-1]}{1/n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+p/(2n+1)+o(1/n)-1}{1/n}=\frac{p}{2},$$

所以当 $0<p\leqslant 2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，即原级数条件收敛.

当 $p>2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，即原级数绝对收敛.

(4) $u_n=(-1)^n\frac{1}{2^n+\ln n}$. 因为

$$|u_n|=\frac{1}{2^n+\ln n}<\frac{1}{2^n},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，即原级数绝对收敛.

例 3 判别下列级数是否收敛. 若收敛，是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi+1/\ln n)$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$.

解 (1) $u_n=(-1)^n\sin(1/\ln n)$，当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$0<\frac{1}{\ln n}\leqslant\frac{1}{\ln 2}=\log_2 e<\log_2(2\sqrt{2})=\frac{3}{2}<\frac{\pi}{2}.$$

故 $0<\sin(1/\ln n)<1$，原级数为交错级数. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(1/\ln n)}{1/\ln n}\cdot\frac{n}{\ln n}=+\infty,$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}|u_n|$ 发散，原级数不绝对收敛.

但当 n 增大时，$1/\ln n$ 单调减少，$\sin(1/\ln n)$ 也单调减少，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(1/\ln n)=0$，故依莱布尼茨判别法知，原级数条件收敛.

(2) $u_n=\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})=\sin[n\pi+\pi\sqrt{n^2+a^2}-n\pi)]$

$$=(-1)^n\sin\pi(\sqrt{n^2+a^2}-n)$$

$$=(-1)^n\sin\frac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n},$$

故原级数是交错级数.

但是，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}=0$，$|u_n|>|u_{n+1}|$，所以依莱布尼茨判别法知，原级数收敛.

例 4 判别下列级数是否收敛.若收敛，是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{a}{n}\ (a>0)$;　　(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\sin\dfrac{n\pi}{12}\right)\Big/\ln n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n^{2k}+1}}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n^2+n\alpha+\beta}{n}\pi$，$\alpha,\beta$ 为常数.

解 (1) 当 n 充分大时，$\sin(a/n)>0$，且单调减少并趋向于零，依莱布尼茨判别法知，原级数收敛.

又 $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{a}{n}\right)\Big/\dfrac{a}{n}=1$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a}{n}$ 发散，故原级数不绝对收敛，即原级数条件收敛.

(2) 当 $n>2$ 时，$1/\ln n>0$，且单调减少并趋向于零.

$\forall n \in \mathbf{N}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{12}$ 的部分和的绝对值

$$|S_n| = \left| \sum_{k=2}^{n} \sin \frac{k\pi}{12} \right| = \left| \frac{\cos(3\pi/24) - \cos[(n+1/2)\pi/12]}{2\sin(\pi/24)} \right|$$
$$\leqslant 1/\sin(\pi/24).$$

即 S_n 有界,依狄利克雷判别法知,原级数收敛.

$$\text{又} \left| \left(\sin \frac{n\pi}{12} \right) \Big/ \ln n \right| \geqslant \frac{\sin^2(n\pi/12)}{\ln n} = \frac{1-\cos(n\pi/6)}{2\ln n}.$$
$$= \frac{1}{2\ln n} - \frac{\cos(n\pi/6)}{2\ln n},$$

而 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2\ln n}$ 发散,$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\cos \frac{n\pi}{6} \right) \Big/ (2\ln n)$ 收敛,故原级数不绝对收敛,即原级数条件收敛.

(3) 因为 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0$,所以原级数是交错级数. 而

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0,$$

又设 $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x(x+1)}} < 0.$$

所以 $f(x)$单调减少,原级数收敛.

(4) $u_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n^{2k}+1}}$.

当 $k > 1$ 时,$|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n^{2k}+1}} < \frac{1}{n^k}$,而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ 收敛,所以原级数绝对收敛.

当 $0 < k \leqslant 1$ 时,$\lim_{n\to\infty} |u_n| \Big/ \frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{\sqrt{n^{2k}+1}} = 1$,由比较审敛法的极限形式知,$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散. 但是

$$\frac{1}{\sqrt{n^{2k}+1}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)^{2k}+1}}, \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^{2k}+1}} = 0,$$

依莱布尼茨判别法知,原级数收敛,即条件收敛.

(5) $u_n=\sin\dfrac{n^2+n\alpha+\beta}{n}\pi=\sin[n\pi+(\alpha+\beta/n)\pi]$

$=(-1)^n\sin(\alpha+\beta/n)\pi$,

当 $\alpha\neq0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$,故原级数发散.

当 $\alpha=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时,$u_n=(-1)^{n+\alpha}\sin(\beta\pi/n)$. 若 $\beta=0$,则原级数绝对收敛;若 $\beta\neq0$,不妨设 $\beta>0$(当 $\beta<0$ 时,$u_n=(-1)^{n+\alpha+1}\sin(|\beta|\pi/n)$),$u_n(-1)^{n+\alpha}\sin(\beta\pi/n)\sim(-1)^{n+\alpha}(\beta\pi/n)$.

依莱布尼茨判别法知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+\alpha}(\beta\pi/n)$ 条件收敛,则原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+\alpha}\sin(\beta\pi/n)$ 条件收敛.

例 5 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin n}{\ln n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{\sin n}{n}$.

解 两级数都是任意项级数.

(1) $\sum\limits_{n=2}^{k}\sin n=\dfrac{\cos(3/2)-\cos(k+1/2)}{2\sin(1/2)}$, $k=2,3,\cdots$,

故
$$\left|\sum_{n=2}^{k}\sin n\right|\leqslant1/\sin(1/2),\ k=2,3,\cdots.$$

又当 $n\geqslant2$ 时,$\dfrac{1}{\ln n}>0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n}=0$,故依狄利克雷判别法知,$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin n}{\ln n}$ 收敛.

设 $f(x)=|\sin x|+|\sin(x+1)|$, $x\in(-\infty,+\infty)$,

则 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的正值连续周期函数,存在 $c>0$,使得 $f(x)>c$. 于是

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\sin n|}{\ln n}=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{|\sin2k|}{\ln2k}+\frac{|\sin(2k+1)|}{\ln(2k+1)}\right]$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\sin2k|+|\sin(2k+1)|}{\ln(2k+1)}$$

$$\geqslant c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2k+1)},$$

而 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2k+1)}$ 发散，故原级数不绝对收敛，即原级数条件收敛.

(2) 令 $a_n=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right),b_n=\sin n$，则

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n(n+1)}\left[-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\frac{n}{n+1}\right].$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散于正无穷大，故当 n 充分大时，$a_{n+1}-a_n<0$，即 $\{a_n\}$ 单调减少. 又

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=C+\ln n+\varepsilon_n,C\text{ 为欧拉数},\varepsilon_n\to 0,\text{所以}$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n(n+1)}\left[-(C+\ln n+\varepsilon_n)+\frac{n}{n+1}\right]\to 0$$
$$(n\to\infty).$$

由题(1) 知 $\sum_{k=1}^{n}\sin k$ 有界. 故依狄利克雷判别法知，原级数收敛.

利用与题(1) 类似方法，可证题(2) 的原级数不绝对收敛，即原级数条件收敛.

类似地，若 $\{a_n\}$ 单调减少，$\lim_{n\to\infty}a_n=0,x\neq 2k\pi$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 收敛，并可由此证明：当 $x\neq 2k\pi$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\cos nx}{n}$ 收敛.

事实上，若 $x\neq 2k\pi$，则 $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}$. 于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$ 的部分和数列有界，且 a_n 单调减少并趋向于零. 依狄利克雷判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 收敛.

而 $a_n=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}$ 单调减少并且趋向于零. 故依上述结果知，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\cos nx}{n}$ 当 $x\neq 2k\pi$ 时收敛.

例 6 设 $\{a_n\}$ 是实数序列，且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛. 并举例说明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 可能发散.

解 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$，所以 $\exists\ N\in\mathbf{N}$，使得当 $n>N$ 时，$|a_n|<1$，则 $|a_n|>a_n^2$，依比较审敛法知，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是条件收敛级数，而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是调和级数，是发散的.

例 7 讨论 a(实数)的情况，使得级数 $1-\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^a}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6^a}+\cdots$ 收敛.

解 显然，当 $a\leqslant 0$ 时，不满足 $u_n\to 0$，所以级数发散；当 $a>1$ 时，有

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^a}\cdot\frac{1}{k^a}.$$

式中第一项趋向于 $+\infty$，第二项趋向于有限数，所以级数发散；当 $a=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 条件收敛.

当 $0<a<1$ 时，因为

$$\frac{1}{(2n)^a}-\frac{1}{(2n+1)}=\frac{1}{(2n)^a}\left[1-\frac{(2n)^a}{2n+1}\right]\approx\frac{1}{(2n)^a},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^a}$ 发散，即原级数加括号后发散. 故原级数发散.

综上所述知，当 $a=1$ 时，级数收敛，其它情形级数发散.

例 8 证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$. 并证明：若将级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 重排，先有 p 个正项，后有 q 个负项，如此循环，则新级数和为 $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

证 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 是收敛的交错级数，设其部分和为 S_n，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$. 不妨求 S_{2n}.

$$\begin{aligned}S_{2n}&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\\&\quad-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

由上册第一章中关于欧拉数的定义，有

$$\begin{aligned}S_{2n}&=(\ln 2n+C+r_{2n})-(\ln n+C+r_n)\\&=\ln 2+r_{2n}-r_n.\end{aligned}$$

其中 C 为欧拉数，r_{2n}，r_n 均趋向于零，于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\ln 2.$$

又设依要求重排后的新级数部分和为 S_n，则 $\forall\ k\in\mathbf{N}$，有

$$\begin{aligned}&S_{(p+q)k}\\&=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2q}\right)\\&\quad+\cdots+\left[\frac{1}{2p(k-1)+1}+\cdots+\frac{1}{2pk-1}\right]\\&\quad-\left[\frac{1}{2q(k-1)+2}+\cdots+\frac{1}{2qk}\right]\\&=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2pk-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2qk}\right)\end{aligned}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2pk-1}+\frac{1}{2pk}$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{pk}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{qk}\right)$$

$$=\ln 2pk+C+r_{2pk}-\frac{1}{2}(\ln pk+C+r_{pk})-\frac{1}{2}(\ln qk+C+r_{qk})$$

$$=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}+r_{2pk}-\frac{1}{2}(r_{pk}+r_{qk}),$$

故
$$\lim_{n\to\infty}S_{(p+q)k}=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=0$,所以

$$\lim_{n\to\infty}S_{(p+q)k+m}=\lim_{n\to\infty}S_{(p+q)k}=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q},$$

故新级数的和 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

于是可得

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}\ln 2,$$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}\ln 2.$$

例 9 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为任意项级数,令 $u_n^+=\frac{|u_n|+u_n}{2}$,$u_n^-=\frac{|u_n|-u_n}{2}$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^-$ 都是正项级数,分别称为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的正部和负部. 证明:

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^-$ 都收敛,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^+-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n^-$;

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^-$ 都发散到正无穷大.

证 参看本节疑难解析 2.

例 10 证明黎曼(Riemann)定理 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛，则对任给 B(有限实数或 $\pm\infty$)，都有级数的一个重排 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$，使得 $B = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'$.

证 (1) 设 B 为有限实数，不妨设 $B > 0$. 由例 9 知，存在 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+ = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^- = -\infty$. 按下述方法对原级数重排：先取 p_1 个正项，使得 $B < \sum_{n=1}^{p_1} u_n^+ \leqslant B + u_{p_1}^+$，再取 q_1 个负项，使 $B + u_{q_1}^- \leqslant \sum_{n=1}^{p_1} u_n^+ + \sum_{n=1}^{q_1} u_n^- \leqslant B$；然后又取 $p_2 - p_1$ 个正项，再取 $q_2 - q_1$ 个负项；……如此继续下去，得到如下的重排：

$$(u_1^+ + \cdots + u_{p_1}^+) + (u_1^- + \cdots + u_{q_1}^-) + \cdots$$
$$+ (u_{p_1+1}^+ + \cdots + u_{p_2}^+) + (u_{q_1+1}^- + \cdots + u_{q_2}^-) + \cdots$$
$$+ (u_{p_{k-1}+1}^+ + \cdots + u_{p_k}^+) + (u_{q_{k-1}+1}^- + \cdots + u_{q_k}^-) + \cdots,$$

满足
$$\begin{aligned} B &< (u_1^+ + \cdots + u_{p_1}^+) + (u_1^- + \cdots + u_{q_1}^-) + \cdots \\ &\quad + (u_{p_{k-1}+1}^+ + \cdots + u_{p_k}^+) \\ &\leqslant B + u_{p_k}^+ \end{aligned}$$

和
$$\begin{aligned} B + u_{q_k}^- &\leqslant (u_1^+ + \cdots + u_{p_1}^+) + (u_1^- + \cdots + u_{q_1}^-) + \cdots \\ &\quad + (u_{p_{k-1}+1}^+ + \cdots + u_{p_k}^+) + (u_{q_{k-1}+1}^- + \cdots + u_{q_k}^-) \\ &< B. \end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^+ = \lim\limits_{n\to-\infty} u_n^- = 0$，故 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{p_k}^+ = \lim u_{q_k}^- = 0$. 从而重排后级数收敛于 B，此级数去括号后即为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$，即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n' = B$.

(2) 设 $B = +\infty$($-\infty$ 可类似证明).

先取 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 的前 m_1 项，使得

$$u_1^+ + u_2^+ + \cdots + u_{n_1}^+ > 1 - u_1^-;$$

再取 $m_2>m_1$,使得

$$u_1^+ + \cdots + u_{m_1}^+ + u_{m_1+1}^+ + \cdots + u_{m_2}^+ > 2 - u_1^- - u_2^-;$$

更一般地,取 $m_k>m_{k-1}$,使得

$$u_1^+ + \cdots + u_{m_1}^+ + \cdots + u_{m_k}^+ > k - u_1^- - \cdots - u_k^-,$$

其中 $k=2,3,\cdots$. 由于 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^+$ 是发散的,故上述重排是可行的,所以重排后级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n' = B$.

例 11 判断下列命题是否正确,如正确加以证明,如不正确举出反例.

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(a_1 + a_2 + \cdots a_n)$ 收敛;

(2) 若 $|a_n|$ 收敛于零,则 $\{a_n\}$ 是有界变差的;

(3) 若 $2|a_{n+1}| \leqslant |a_n|$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛.

解 (1) 正确. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 绝对收敛,所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leqslant M \ (M > 0),$$

故

$$|a_n(a_1 + \cdots + a_n)| \leqslant M|a_n|,$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(a_1 + \cdots + a_n)$ 收敛.

(2) 不正确. 若 $\{a_n\}$ 满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n-1}| <+ \infty$,则称 $\{a_n\}$ 是有界变差的. 例如 $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$,有 $|a_n| = \dfrac{1}{n} \to 0$,但 $\{a_n\}$ 不是有界变差的.

(3) 正确. 由 $2|a_{n+1}| \leqslant |a_n|$,有 $|a_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|a_1|$,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$

收敛.

例 12 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} C_m^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}C_m^2$.

解 $C_m^n=\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$.

(1) 当 m 为正整数时,级数只有有限项,所以级数必然收敛.

当 m 不是正整数时,有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{m-n}{n+1}=-\frac{n-m}{n+1}.$$

(i) 若 $m\leqslant -1$,有 $n-m\geqslant n+1$,则 $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\geqslant 1$,从而 $|u_n|\geqslant |u_1|=|m|>1$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|\neq 0$,原级数发散.

(ii) 若 $m>-1$,在 $n>m$ 时,$-1<\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<0$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为交错级数,$|u_n|$ 单调减少,且 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=0$,于是由莱布尼茨判别法知,原级数收敛.

事实上,因为

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{n-m}{n+1}=1-\frac{m+1}{n+1},$$

所以若记 $a_n=\dfrac{m+1}{n+1}$,则 $0<a_n<1$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\infty$. 由 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛(见第三节例 6),有

$$\lim_{n\to\infty}(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)=+\infty.$$

但是 $1+a_n=\dfrac{1-a_n^2}{1+a_n}<\dfrac{1}{1+a_n}$,于是

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)$$

$$<\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a_1}\cdot\frac{1}{1+a_2}\cdots\frac{1}{1+a_n}=0,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{m+2}}{u_{m+1}}\right|\cdot\left|\dfrac{u_{m+3}}{u_{m+2}}\right|\cdots\left|\dfrac{u_{m+n+1}}{u_{m+n}}\right|=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=0.$

(2) 当 m 是正整数时,原级数收敛.

当 m 不是正整数,而 n 充分大时,有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n-m}{n+1}>0,$$

则级数是同号级数(不妨设为正项级数). 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=m+1,$$

依拉贝判别法,当 $m>0$ 时,原级数收敛;当 $m<0$ 时,原级数发散.

例 13 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛,证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 也收敛.

证 由题设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n-a_{n-1}|$ 收敛,则由柯西准则,$\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ N_1\in\mathbf{N}$,当 $n>N_1$ 时,$\forall\ p\in\mathbf{N}$,有

$$|a_{n+2}-a_{n+1}|+|a_{n+3}-a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+p}-a_{n+p-1}|<\varepsilon,\quad ①$$

即 $$\begin{aligned}&|a_{n+p}-a_{n+1}|\\ \leqslant\ &|a_{n+p}-a_{n+p-1}|+\cdots+|a_{n+2}-a_{n+1}|<\varepsilon.\end{aligned}\quad ②$$

又由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,则其部分和序列 $\{S_n\}$ 收敛. 由柯西准则,对前述 $\varepsilon>0$,$\exists\ N_2\in\mathbf{N}$,当 $n>N_2$ 时,$\forall\ p\in\mathbf{N}$,有

$$|S_{n+p}-S_p|<\varepsilon.\quad ③$$

故$\forall\ k\in\mathbf{N}$,有 $b_k=S_k-S_{k-1}\ (S_0=0)$.

由式②、式③知,数列 $\{b_n\}$ 和 $\{S_n\}$ 都收敛,从而都有界. 即 $\exists\ M>0,\forall\ n\in\mathbf{N}$,有 $|a_n|\leqslant M$ 与 $|S_n|\leqslant M$.

综上所述知,$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N=\max\{N_1,N_2\}\in\mathbf{N},\forall\ n>N$, $\forall\ p\in\mathbf{N}$,有

$|a_{n+1}b_{n+1}+a_{n+2}b_{n+2}+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}|$

$$
\begin{aligned}
&=|a_{n+1}(S_{n+1}-S_n)+a_{n+2}(S_{n+2}-S_{n+1})+\cdots \\
&\quad +a_{n+p}(S_{n+p}-S_{n+p-1})| \\
&=|S_{n+1}(a_{n+1}-a_{n+2})+S_{n+2}(a_{n+2}-a_{n+3})+\cdots \\
&\quad +S_{n+p-1}(a_{n+p-1}-a_{n+p})+a_{n+p}S_{n+P}-a_{n+1}S_n| \\
&\leqslant |S_{n+1}||a_{n+1}-a_{n+2}|+|S_{n+2}||a_{n+2}-a_{n+3}|+\cdots \\
&\quad +|S_{n+p-1}||a_{n+p-1}-a_{n+p}| \\
&\quad +|a_{n+p}S_{n+p}-a_{n+p}S_n+a_{n+p}S_n-a_{n+1}S_n| \\
&\leqslant M(|a_{n+2}-a_{n+1}|+|a_{n+3}-a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+p}-a_{n+p-1}|) \\
&\quad +M|S_{n+p}-S_n|+M|a_{n+p}-a_{n+1}| \\
&<M\varepsilon+M\varepsilon+M\varepsilon=3M\varepsilon.
\end{aligned}
$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

例 14 证明:级数 $1-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{7}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots$是收敛的.

证 因为

$$
\begin{aligned}
|u_n|&=\frac{1}{2n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \\
&=\frac{(2n-1)+2}{(2n-1)(2n+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \\
&=\frac{1}{2n+1}\left[\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right] \\
&>\frac{1}{2n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)=|u_{n+1}|, n=1,2,\cdots,
\end{aligned}
$$

所以$\{u_n\}$单调减少. 又

$$|u_n|=\frac{1}{2n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n-1}(\ln n+C+\varepsilon_n)\to 0,$$

其中 C 为欧拉数.

故依莱布尼茨判别法知,原级数收敛.

例 15 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(a_n>0)$ 发散,$S_n=a_1+a_2+\cdots+$

a_n，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 也发散.

证 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则其部分和序列 $\{S_n\}$ 单调增加且无上界. $\forall\ n\in\mathbf{N}$，$\exists\ p\in\mathbf{N}$，使得 $S_{n+p}\geqslant 2S_n$ 或 $S_n/S_{n+p}\leqslant 1/2$. 有

$$\begin{aligned}&\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}+\frac{a_{n+2}}{S_{n+2}}+\cdots+\frac{a_{n+p}}{S_{n+p}}\\&>\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}}{S_{n+p}}\\&=\frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}\geqslant 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

即 $\exists\ \varepsilon_0=1/2>0$，$\forall\ N\in\mathbf{N}$，$\exists\ n>N$，$\exists\ p\in\mathbf{N}$（使 $S_{n+p}\geqslant 2S_n$），有

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}+\frac{a_{n+2}}{S_{n+2}}+\cdots+\frac{a_{n+p}}{S_{n+p}}\geqslant\frac{1}{2},$$

于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 也发散.

例 16 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\,(a_n>0)$ 收敛，$r_n=\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{r_n}$ 发散.

证 $\forall\ n\in\mathbf{N}$，$r_n>0$，且 $\{r_n\}$ 严格单调减少. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$. 故 $\forall\ n\in\mathbf{N}$，$\exists\ p\in\mathbf{N}$，使得 $2r_{n+p}<r_{n+1}$ 或 $\frac{r_{n+p}}{r_{n+1}}<\frac{1}{2}$. $\forall\ n\in\mathbf{N}$，$r_n=a_n+r_{n+1}$，或 $r_{n+1}=r_n-a_n$，有

$$\begin{aligned}&\frac{a_{n+1}}{r_{n+1}}+\frac{a_{n+2}}{r_{n+2}}+\cdots+\frac{a_{n+p}}{r_{n+p}}\\&>\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}}{r_{n+1}}=\frac{r_{n+1}-r_{n+p+1}}{r_{n+1}}\\&=\frac{r_{n+1}-r_{n+p}+a_{n+p}}{r_{n+1}}=1-\frac{r_{n+p}}{r_{n+1}}+\frac{a_{n+p}}{r_{n+1}}\end{aligned}$$

$$>1-\frac{r_{n+p}}{r_{n+1}}>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

即$\exists\ \varepsilon_0=1/2>0, \forall\ N\in\mathbf{N}, \exists\ n>N, \exists\ p\in\mathbf{N}$(使 $2r_{n+p}<r_{n+1}$)，有

$$\frac{a_{n+1}}{r_{n+1}}+\frac{a_{n+2}}{r_{n+2}}+\cdots+\frac{a_{n+p}}{r_{n+p}}>\frac{1}{2}.$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{r_n}$发散.

例 17 若记$E(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}$，则对任何实数$\lambda$，$E(\lambda)$绝对收敛，证明：

(1) $E(a)E(b)=E(a+b)$； (2) $E(a)E(-a)=1$；

(3) $E\left(\frac{m}{k}\right)=\left[E\left(\frac{1}{k}\right)\right]^m$； (4) $E\left(\frac{1}{k}\right)=[E(1)]^{1/k}$.

证 (1) 由

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}\right|\Big/\left|\frac{\lambda^n}{n!}\right|=\frac{|\lambda|}{n+1}\to 0$$

知，$E(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}$是绝对收敛的. 而积级数$E(a)E(b)$的一般项为

$$\begin{aligned}w_n&=u_0v_n+u_1v_{n-1}+\cdots+u_nv_0\\&=1\cdot\frac{b^n}{n!}+\frac{a}{1!}\cdot\frac{b^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}\cdot 1\\&=\frac{1}{n!}\left(b^n+\frac{n}{1!}ab^{n-1}+\cdots+\frac{n}{1!}a^{n-1}b+a^n\right)\\&=\frac{1}{n!}(C_n^0b^n+C_n^1ab^{n-1}+\cdots+C_n^{n-1}a^{n-1}b+C_n^na^n)\\&=\frac{1}{n!}(a+b)^n.\end{aligned}$$

即 $$E(a)E(b)=\sum_{n=0}^{\infty}w_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+b)^n}{n!}=E(a+b).$$

(2) $E(a)E(-a)=E(a-a)=E(0)=1$.

(3) $E\left(\frac{m}{k}\right)=E\left(\frac{1}{k}\right)E\left(\frac{m-1}{k}\right)=E\left(\frac{1}{k}\right)^2 E\left(\frac{m-2}{k}\right)=\cdots$

$$=E\left(\frac{1}{k}\right)^m.$$

(4) $[E(1)]^{1/k}=\left[E\left(\frac{k}{k}\right)\right]^{1/k}=\left[E\left(\frac{1}{k}\right)^k\right]^{1/k}=E\left(\frac{1}{k}\right).$

例 18 若$\sum a_n$和$\sum b_n$两级数均收敛，且其中至少有一个绝对收敛，证明：积级数$\sum c_n$也收敛，且$\sum c_n = \sum a_n \sum b_n$.

证 不妨设$\sum a_n$绝对收敛，部分和分别为

$$A_m = \sum_{n=0}^{m} a_n,\quad B_m = \sum_{n=0}^{m} b_n,\quad C_m = \sum_{n=0}^{m} c_n,$$

则 $C_m = a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)+\cdots+(a_0b_m+a_1b_{m-1}+\cdots+a_mb_0)$

$$=a_0(b_0+b_1+\cdots+b_m)+a_1(b_0+b_1+\cdots+b_{m-1})$$
$$+\cdots+a_{m-1}(b_0+b_1)+a_mb_0$$
$$=a_0B_m+a_1B_{m-1}+\cdots+a_mB_0,$$

记$\sum a_n = A$，$\sum b_n = B$，则 $B_k=B+\beta_k(k=0,1,2,\cdots)$，$\beta_m\to 0$.

又 $C_m = a_0(B+\beta_m)+a_1(B+\beta_{m-1})+\cdots+a_m(B+\beta_0)$

$$=(a_0+a_1+\cdots+a_m)B+a_0\beta_m+a_1\beta_{m-1}+\cdots+a_m\beta_0$$
$$=A_mB+R_m,$$

当 $m>N$ 时，有

$$R_m= a_0\beta_m + a_1\beta_{m-1} + \cdots + a_m\beta_0$$
$$= (a_0\beta_m + a_1\beta_{m-1} + \cdots + a_N\beta_{m-N})$$
$$+ (a_{N+1}\beta_{m-N-1} + \cdots + a_m\beta_0)$$

由于$\beta_m\to 0$，故$\exists\, k>0$，对任意n，$|\beta_n|<k$，且当N充分大时，只要$n>N$，就有$|\beta_m|<\varepsilon$. 又$\sum a_n$绝对收敛，则$\exists\, N_a>0$，使得$\forall\, m>N_a$，有

$$|a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots + |a_m| < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

若记$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{N_a}|=M$，可取$N_1$，使得对一切$n>N_1$，有

$|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2M}$. 对上述 N_1 和 N_a 以及 $m>N_1+N_a$，有

$$
\begin{aligned}
|R_m| &\leqslant |a_0\beta_m + a_1\beta_{m-1} + \cdots + a_{N_a}\beta_{m-N_a}| \\
&\quad + |a_{N_a+1}\beta_{m-N_a-1} + \cdots + a_m\beta_0| \\
&\leqslant M\frac{\varepsilon}{2M} + k\frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

即有 $R_m\to 0$，也就是 $\lim\limits_{m\to\infty}C_m=\lim\limits_{m\to\infty}A_mB=AB$，故

$$
\sum c_n = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right).
$$

例 19 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\alpha}}$ 收敛，则 $\forall\ \beta>\alpha$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\beta}}$ 也收敛.

证 因为 $\beta=\alpha+\lambda,\lambda>0$，故

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\beta}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\alpha+\lambda}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\alpha}}\cdot\frac{1}{n^{\lambda}},
$$

而 $\left\{\frac{1}{n^{\lambda}}\right\}$ 单调减少且有下界(如零)，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\alpha}}$ 收敛，依阿贝尔判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\beta}}$ 收敛.

例 20 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\alpha}}\ (\alpha>0)$ 收敛，则

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n^{\alpha}} = 0.
$$

证 依柯西准则，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\alpha}}$ 收敛，故 $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ m\in\mathbf{N},\forall\ p\in\mathbf{N}$，有

$$
\left|\frac{a_{m+1}}{(m+1)^{\alpha}} + \frac{a_{m+2}}{(m+2)^{\alpha}} + \cdots + \frac{a_{m+p}}{(m+p)^{\alpha}}\right| < \varepsilon,
$$

而 $$0<\left(\frac{m+1}{m+p}\right)^{\alpha}<\left(\frac{m+2}{m+p}\right)^{\alpha}<\cdots<\left(\frac{m+p}{m+p}\right)^{\alpha}=1.$$

依阿贝尔变换，有

$$\left|\frac{a_{m+1}}{(m+1)^{\alpha}}\left(\frac{m+1}{m+p}\right)^{\alpha}+\frac{a_{m+2}}{(m+2)^{\alpha}}\left(\frac{m+2}{m+p}\right)^{\alpha}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{a_{m+p}}{(m+p)^{\alpha}}\left(\frac{m+p}{m+p}\right)^{\alpha}\right|<\varepsilon,$$

即
$$\left|\sum_{k=m+1}^{m+p}\frac{a_k}{(m+p)^{\alpha}}\right|<\varepsilon.$$

当 m 固定时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{(m+p)^{\alpha}}\right|=\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{(m+p)^{\alpha}}\right|\to 0\ (p\to+\infty),$$

即对上述 $\varepsilon>0$，$\exists\ L\in\mathbf{N}$，$\forall\ p>L$，有

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{(m+p)^{\alpha}}\right|=\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{(m+p)^{\alpha}}\right|<\varepsilon.$$

于是，$\forall\ \varepsilon>0$ $(\exists\ m\in\mathbf{N})$，$\exists\ L\in\mathbf{N}$，$\forall\ p>L$，有

$$\left|\sum_{k=1}^{m+p}\frac{a_k}{(m+p)^{\alpha}}\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{(m+p)^{\alpha}}\right|+\left|\sum_{k=m+1}^{m+p}\frac{a_k}{(m+p)^{\alpha}}\right|>2\varepsilon.$$

由于 $p>L$ 且可任意大，故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n^{\alpha}}=0.$$

例 21 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

证 由题设知，$f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有二阶泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(\xi)x^2=\frac{1}{2}f''(\xi)x^2.$$

又由 $f''(x)$ 的连续性知，$\exists\ M>0$，使得 $|f''(x)|\leqslant M$，于是

$$|f(x)|=\frac{1}{2}|f''(\xi)x^2|\leqslant\frac{M}{2}x^2,$$

令 $x=\frac{1}{n}$，得 $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$. 因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

例 22 证明:(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 自乘的柯西乘积收敛;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 自乘的柯西乘积发散.

证 (1) 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 是收敛的交错级数,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{n-k+1}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2(n+1)}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 1}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n.$$

所以,$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$ 是交错级数,要证明其收敛.

$$c_n-c_{n-1}=\left[\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2(n-1)}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 1}\right]$$

$$-\left[\frac{1}{1\cdot(n+1)}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 2}+\frac{1}{(n+1)\cdot 1}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{n+1}\to 0,$$

即数列$\{c_n\}$单调减少并趋向于零.

又 $$c_{2n}=\frac{1}{1\cdot(2n)}+\frac{1}{2(2n-1)}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$+\frac{1}{(n+1)n}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2}+\frac{1}{(2n)\cdot 1}$$

$$=2\left[\frac{1}{1\cdot(2n)}+\frac{1}{2(2n-1)}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$$

$$\leqslant 2\left[\frac{1}{1\cdot(n+1)}+\frac{1}{2(n+1)}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$$

$$=\frac{2}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{n+1}(\ln n+C+r_n).$$

其中 C 为欧拉数，$r_n\to 0$，因而 $\lim\limits_{n\to\infty}c_{2n}=0$. 即单调减少数列 $\{c_n\}$ 的一个偶子列极限为零，因而 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$.

依莱布尼茨判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 自乘的柯西乘积收敛.

(2) 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是收敛的交错级数，

$$\begin{aligned}c_n&=a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+\cdots+a_{n-1}b_1\\&=\sum_{k=1}^{n-1}a_kb_{k-1}=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot(-1)^{n-k-1}\frac{1}{\sqrt{n-k}}\\&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}.\end{aligned}$$

当 $n>k\geqslant 1$ 时，显然有 $\sqrt{k(n-k)}\leqslant\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{n-1}$，所以

$$|c_n|=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-k}}\geqslant(n-1)\frac{1}{\sqrt{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-1}}=1,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n\neq 0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 自乘的柯西乘积发散.

例 23 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{[n]}\frac{1}{n}$ 的敛散性.

解 将级数中相邻且符号相同的项合并成一项，可得一新的交错级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right].$$

而 $k\cdot\frac{1}{k^2+k}<\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{k^2+(k-1)}<k\cdot\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k}$,

$$(k+1)\frac{1}{k^2+k}<\frac{1}{k^2+k}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}$$

$$<(k+1)\frac{1}{(k+1)^2-1}=\frac{1}{k},$$

所以 $\frac{2}{k+1}<\frac{1}{k^2}+\cdots+\frac{1}{k^2+(k-1)}+\frac{1}{k^2+k}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}<\frac{2}{k}$.
于是,新交错级数通项当 $k\to\infty$ 时趋向于零,且绝对值单调减少.依莱布尼茨判别法知,新级数收敛.

又原级数部分和包含在新级数两相邻部分和之间,因而原级数部分和极限存在,即原级数收敛.因为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{[n]}\frac{1}{n}$ 不绝对收敛,从而确定原级数条件收敛.

下面讨论级数与非正常积分的关系.

例 24 证明下列非正常积分收敛:

(1) $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

证 (1) 对给定的 $A>0$,有惟一的 $n>0$,使得 $\sqrt{n}<A<\sqrt{n+1}$,当 $A\to+\infty$ 时,$n\to+\infty$. 于是,当 $\sqrt{k-1}\leqslant x<\sqrt{k}$ 时,$k-1\leqslant x^2<k$,$[x^2]=k-1$,从而

$$\int_0^A(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{\sqrt{k-1}}^{\sqrt{k}}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{n}}^{A}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}+(-1)^n(A-\sqrt{n}).$$

由莱布尼茨判别法知,$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$ 收敛,又

$$|(-1)^n(A-\sqrt{n})|\leqslant\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to 0,$$

所以 $\lim_{A\to\infty}\int_0^A(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x=S$,即积分 $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 因为 $\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}$ 在 $[0,+\infty)$ 非负,故只需证级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 收敛. 为此,先估计

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\mathrm{d}x\leqslant\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{(k+1)\pi}{1+(k\pi)^6\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{k\pi}^{k\pi+\pi/2} \frac{(k+1)\pi \mathrm{d}(\tan x)}{1+[(k\pi)^6+1]\tan^2 x}$$

$$+ \int_{k\pi+\pi/2}^{(k+1)\pi} \frac{(k+1)\pi \mathrm{d}(\tan x)}{1+[(k\pi)^6+1]\tan^2 x}$$

$$= \frac{(k+1)\pi}{\sqrt{(k\pi)^6+1}} \left[\arctan(\sqrt{(k\pi)^6+1}\tan x)\right]\Big|_{k\pi}^{k\pi+\pi/2-0}$$

$$+ \arctan(\sqrt{(k\pi)^6+1}\tan x)\Big|_{k\pi+\pi/2+0}^{(k+1)\pi}$$

$$= \frac{(k+1)\pi}{\sqrt{(k\pi)^6+1}} \cdot \pi \leqslant \frac{(k+1)\pi^2}{(k\pi)^3} = \frac{2}{\pi k^2}.$$

而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k^2}$ 收敛，所以 $\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{x}{1+x^6\sin^2 x} \mathrm{d}x$ 收敛. 从而原非正常积分收敛.

例 25 函数 $f(x)$ 在 $x \geqslant 0$ 单调有定义，且非正常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 存在，证明：

$$\lim_{h\to 0^+} h[f(h)+f(2h)+\cdots] = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

证 设 $f(x)$ 单调增加（$f(x)$ 单调减少类似可证或考虑 $-f(x)$），则 $\forall\, h>0$，有

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{(k-1)h}^{kh} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} hf(kh)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{kh}^{(k+1)h} f(x)\mathrm{d}x = \int_h^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

令 $h \to 0^+$，得

$$\lim_{h\to 0^+} h\sum_{k=1}^{+\infty} f(kh) = \lim_{h\to 0^+} \sum_{k=1}^{\infty} hf(kh) = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

例 26 利用例 25 计算

$$\lim_{t\to 1-0} (1-t)\left(\frac{t}{1+t} + \frac{t^2}{1+t^2} + \cdots + \frac{t^n}{1+t^n} + \cdots\right).$$

解 本例的关键是将级数的通项写为 $f(nh)$，然后说明 $f(x)$ 符合上例的条件.

$$原式 = \lim_{t\to 1-0}(1-t)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{1+t^n} = \lim_{t\to 1-0}(1-e^{\ln t})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n\ln t}}{1+e^{n\ln t}}$$

$$\xlongequal{令 h=-\ln t} \lim_{h\to 0^+}\frac{1-e^{-h}}{h}\cdot h\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nh}}{1+e^{-nh}}$$

$$= \lim_{h\to 0^+}\frac{1-e^{-h}}{h}\cdot\lim_{h\to 0^+} h\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nh}}{1+e^{-nh}}$$

$$= 1\cdot\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \ln 2,$$

其中 $f(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ 符合例 25 条件.

第三节　无穷乘积

主要内容

1. 对于一个给定的数列 $\{f_n\}$ ($f_n\neq 0, n=1,2,\cdots$)，称积式

$$f_1f_2\cdots f_n\cdots = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$$

为无穷乘积. 并定义部分乘积 $\{P_m\}$：

$$P_m = f_1f_2\cdots f_m = \prod_{n=1}^{m} f_n.$$

2. 当部分积数列 $\{P_m\}$ 收敛于一个非零常数 P 时，称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ 收敛于 P，即

$$\prod_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{m\to\infty} P_m = P.$$

否则称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ 发散. 发散包括：

(1) $P_m \to \infty$,记作$\prod_{n=1}^{\infty} f_n \to \infty$;

(2) P_m 摆动;

(3) $P_m \to 0$.称$\prod_{n=1}^{\infty} f_n$发散于零,记作$\prod_{n=1}^{\infty} f_n = 0$.

$$\pi_m = f_{m+1} f_{m+2} \cdots = \prod_{n=m+1}^{\infty} f_n$$

称为 m 项后的余项.当$\prod_{n=1}^{\infty} f_n$收敛时,$\pi_m = \frac{P}{P_m}$.

3.若$\prod_{n=1}^{\infty} f_n$收敛于 P,则

$$\begin{cases} \lim\limits_{m\to\infty} f_m = \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{P_m}{P_{m-1}} = \dfrac{P}{P} = 1, \\ \lim\limits_{m\to\infty} \pi_m = \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{P}{P_{m-1}} = \dfrac{P}{P} = 1. \end{cases}$$

4.无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty} f_n$收敛的充要条件有

(1) 部分积数列$\{P_m\}$是柯西数列,且存在常数 $k>0$,对一切 P_m,有$|P_m| \geq k > 0$;

(2) $\forall\ \varepsilon>0, \exists\ N>0, \forall\ n>N$ 及 $k\geq 1$,有

$$|P_{n+k}/P_{n-1}| < \varepsilon.$$

5.若无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$收敛,则称无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$绝对收敛.$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$收敛但不绝对收敛的无穷乘积称为条件收敛.

疑 难 解 析

1.无穷乘积与无穷级数有什么关系?

答 无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty} f_n$与无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$都是由无穷数列$\{f_n\}$

引出的，都有收敛和发散、绝对收敛与条件收敛等概念.

无穷乘积的收敛往往与某个无穷级数的收敛有关. 例如：$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 绝对收敛（见例 10）；当 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛时 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛，当 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散时 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散于零（见例 11）.

方法、技巧与典型例题分析

无穷乘积的计算主要是证明等式，往往通过先求部分乘积 P_n，然后取 $n\to\infty$ 的极限得到. 其技巧表现为，求部分乘积时要借助一些已知公式与结果，使运算更为简捷. 无穷乘积的另一主要类型习题是研究无穷乘积的敛散性，这可以根据有关定义、命题并经一些转化求解，有一定的难度，因而要求读者熟悉概念和变换.

例 1 证明下列等式：

(1) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$；　　(2) $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}$；

(3) $\prod_{n=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]=2$；　　(4) $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{2}{\pi}$.

证 (1)
$$P_n=\prod_{k=2}^{n}f_k=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{2},$$

故
$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

(2)
$$P_n=\prod_{k=2}^{n}f_k=\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{2}{3}.$$

故
$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}.$$

(3) $P_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$,

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)P_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}},$$

故
$$P_m=\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}\right]\Big/\left(1-\frac{1}{2}\right)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{1-1/2}=2,$$

即
$$\prod_{n=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]=2.$$

(4) $P_n=\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

$$=\frac{1}{2\sin(\pi/2^{n+1})}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\left(\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

$$=\cdots=\frac{\sin(\pi/2)}{2^n\sin(\pi/2^{n+1})}=\frac{2^{\pi/2^{n+1}}}{\sin(\pi/2^{n+1})}\cdot\frac{2}{\pi}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{2}{\pi},$$

故
$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{2}{\pi}.$$

例 2 讨论下列无穷乘积的敛散性：

(1) $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]$;　　　(2) $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}$;

(3) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{3n-1}\cdot\frac{3n}{3n+1}$;

(4) $\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots$.

解 (1) 由瓦里士(Wallis)公式

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2=\pi,\\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

知
$$P_n=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\right)\cdots\left(\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n+2}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2(2n+2)}\left[\frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!}\right]^2 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\pi}{4},$$

故
$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]=\frac{\pi}{4}.$$

(2) 当 $x\neq 0$ 时,部分积

$$P_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}$$
$$=\frac{x/2^n}{\sin(x/2^n)}\cdot\frac{\sin x}{x}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{\sin x}{x},$$

故
$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}\quad (x\neq 0).$$

(3) 由 $\sin x$ 的无穷乘积展开 $\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\pi^2}{n^2x^2}\right)$,令 $x=\frac{\pi}{2}$,有

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(3n)^2}\right]=\frac{\pi}{3}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)(3n+1)}{(3n)^2},$$

于是,有

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{3n-1}\cdot\frac{3n}{3n+1}=\frac{\pi/3}{\sin(\pi/3)}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(4) 在题(1)中,令 $x=\pi/2$,利用半角公式,有

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)\Big/2}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\cdots,$$

得
$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots,$$

故
$$\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots=\frac{\pi}{2}.$$

例 3 设 $\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ 和 $\prod_{n=1}^{\infty}q_n$ 收敛,讨论下列乘积的敛散性:

(1) $\prod_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n)$;　　　(2) $\prod_{n=1}^{\infty}p_n^2$;

(3) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n$;　　　　(4) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n/q_n$.

解　设 $P=\prod_{n=1}^{\infty} p_n$, $Q=\prod_{n=1}^{\infty} q_n$, $P_n=\prod_{k=1}^{n} p_k$, $Q_n=\prod_{k=1}^{n} q_k$.

(1) 由无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ 收敛的必要条件 $\lim_{n\to\infty} f_n=1$ 知

$$\lim_{n\to\infty} p_n=1, \lim_{n\to\infty} q_n=1,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}(p_n+q_n)=2.$$

故 $\prod_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n)$ 不收敛.

(2) 因为 $\prod_{k=1}^{n} p_n^2=\left(\prod_{k=1}^{n} p_n\right)^2=P_n^2$, 而 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n=\lim_{n\to\infty} P_n=P$, 故 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n^2=\lim_{n\to\infty} P_n^2=P^2$, 即 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n^2$ 收敛.

(3) 因为 $\prod_{k=1}^{n} p_k q_k=\prod_{k=1}^{n} p_k \prod_{k=1}^{n} q_k=P_n Q_n$, 而 $\lim_{n\to\infty} P_n=P$, $\lim_{n\to\infty} Q_n=Q$, 故

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n=\lim_{n\to\infty} P_n \lim_{n\to\infty} Q_n=PQ,$$

即 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n$ 收敛.

(4) 因为 $\prod_{n=1}^{\infty} q_n=Q\neq 0$, 故 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}=\frac{1}{Q}$. 由题(3)知

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}=\prod_{n=1}^{\infty} p_n \cdot \frac{1}{q_n}=\frac{P}{Q}.$$

例 4　证明: $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分积数列 $\{P_m\}$ 是柯西数列, 且 $\exists\, h>0$, 对全部 P_m, 有 $|P_m|\geqslant h>0$.

证　必要性　若 $P_m\to P\neq 0$, 则 $\forall\, \varepsilon>0$, $\exists\, N\in\mathbf{N}$, 对一切 $n>N$, 有 $|P_m-P|<\varepsilon$. 取 $\varepsilon=|P|/2$, 则 $|P_n|>|P|/2$, 于是, 对全部 P_m, 有

$$|P_m| \geqslant \min\{|P_1|,|P_2|,\cdots,|P_N|,|P|/2\} = h > 0.$$

充分性 若$|P_m| \geqslant h > 0$,则

$$|P| = \lim_{m\to\infty}|P_m| \geqslant k > 0,$$

从而 $P \neq 0$.

例 5 证明:$\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N \in \mathbf{N}$,对一切 $n > N$ 和 $k \geqslant 1$,有 $|P_{n+k}/P_n - 1| < \varepsilon$.

证 **必要性** 若 $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ 收敛,则$\{P_m\}$为柯西数列,且有 $|P_m| \geqslant h > 0$(见例 4). 于是 $|P_{n+k} - P_n| < h\varepsilon \Rightarrow |P_{n+k}/P_n - 1| < \varepsilon$.

充分性 若$|P_{n+k}/P_n - 1| < \varepsilon$,则取 $\varepsilon = 1/2$,有

$$|P_n/P_N - 1| < 1/2\ (n > N).$$

于是

$$|P_N|/2 < |P_n| < 3|P_N|/2,$$

故$\forall\ P_m$,有

$$|P_m| \geqslant \min\{|P_1|,|P_2|,\cdots,|P_{N-1}|,|P_N|/2\} = h > 0.$$

又

$$|P_m| \leqslant \max\{|P_1|,|P_2|,\cdots,|P_{N-1}|,3|P_N|/2\} = M.$$

在式中取$|P_{n+k}/P_n - 1| < \varepsilon/M\ (n > N)$,得出$|P_{n+k} - P_n| < \varepsilon$,即$\{P_m\}$是柯西数列,且 $|P_m| \geqslant h > 0$,由例 4 知,$\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ 收敛.

例 6 证明:若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是正项级数,则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$有相同的敛散性.

证 因为对一切 $a_n > 0$ 和 $1 + a_n < e^{a_n}$,有

$$1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
$$< (1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n) < e^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n},$$

即

$$1 + S_m < P_m < e^{S_m}.$$

这里 S_m 是$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和,P_m 是$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ 的部分积.

由于单调有界数列必有极限,且$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数,故$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与

$\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 有相同的敛散性.

例 7 证明:若 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收敛,则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛.

证 设 $P_m=\prod\limits_{n=1}^{m}(1+a_n)$,$Q_m=\prod\limits_{n=1}^{m}(1+|a_n|)$,则

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{P_{n+k}}{P_n}-1\right| &= |(1+a_{n+1})(1+a_{n+2})\cdots(1+a_{n+k})-1| \\
&= \left|\sum_{l=n+1}^{n+k}a_l+(a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+1}a_{n+3}+\cdots+a_{n+k-1}a_{n+k})\right. \\
&\quad \left.+\cdots+a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{l=n+1}^{n+k}|a_l|+(|a_{n+1}||a_{n+2}|+|a_{n+1}||a_{n+3}|+\cdots\right. \\
&\quad \left.+|a_{n+1}||a_{n+k}|)+\cdots+|a_{n+1}||a_{n+2}|\cdots|a_{n+k}|\right| \\
&= \left|\prod_{l=n+1}^{n+k}(1+|a_l|)-1\right| = \left|\frac{Q_{n+k}}{Q_n}-1\right|
\end{aligned}
$$

所以,比较 $\left|\frac{P_{n+k}}{P_n}-1\right|$ 与 $\left|\frac{Q_{n+k}}{Q_n}-1\right|$ 可知:若 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收敛,则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛.

故由例 6 可得:若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,$\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 也绝对收敛,反之也成立.

例 8 证明:设 $0\leqslant a_n<1$,则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 有相同的敛散性,且若 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ 发散,则必发散于零.

证 设 $P_m=\prod\limits_{n=1}^{m}(1+a_n)$,$Q_n=\prod\limits_{n=1}^{m}(1-a_n)$,由题设知,$P_m$ 单调增加,Q_m 单调减少,且均为正.

设$\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$收敛，则$Q_m \to Q > 0$，又$1 > a_n \geqslant 0$，故$1+a_n \leqslant \frac{1}{1-a_n}$，

有 $$P_m = \prod_{n=1}^{m}(1+a_n) < \left|\prod_{n=1}^{m}(1-a_n)\right|^{-1} = \frac{1}{Q_m} \leqslant \frac{1}{Q},$$

即$\{P_m\}$有界，故$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$收敛，从而$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

又设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$a_n \to 0$. 不妨设$a_n < \frac{1}{2}$，有

$$(1-a_n)(1+2a_n) = 1 + a_n - 2a_n^2 = 1 + a_n(1-2a_n) > 1.$$

故有$1 - a_n > \frac{1}{1+2a_n}$. 因为$\sum_{n=1}^{\infty}2a_n$也收敛，所以$\prod_{n=1}^{\infty}(1+2a_n)$收敛，设收敛于$R$ $(R>0)$. 又设$R_m = \prod_{n=1}^{m}(1+2a_n)$，则对一切$m > N$，有

$$\frac{Q_m}{Q_N} = \prod_{n=N+1}^{m}(1-a_n) > \left[\prod_{n=N+1}^{m}(1+2a_n)\right]^{-1} = \frac{R_N}{R_m} \geqslant \frac{R_N}{R},$$

即$Q_m > \frac{R_N Q_N}{R} > 0$. Q_m单调减少且有下界，所以$\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$收敛.

综上所述知，$\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$与$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$有相同的敛散性.

而$\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也发散，由例6知$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$也发散，且$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \to \infty$. 故$\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists\, N \in \mathbf{N}$，$\forall\, m > N$，有$\prod_{n=N+1}^{m}(1+a_n) > \frac{1}{\varepsilon}$，使得

$$0 < \prod_{n=N+1}^{m}(1-a_n) < \left[\prod_{n=N+1}^{m}(1+a_n)\right]^{-1} < \varepsilon,$$

从而 $$Q_m = Q_N \cdot \prod_{n=N+1}^{m}(1-a_n) < Q_N \cdot \varepsilon \xrightarrow{m \to \infty} 0,$$

即 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ 发散.

由本例可知，对于 $0 \leqslant a_n < 1$ 的情形，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$，$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 有相同的敛散性，且 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ 发散于零，$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散于无穷大.

例 9 设 $a_m > -1$，证明：$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 有相同的敛散性，且对 $P=\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 和 $S=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 有 $P=e^S$（或 $S=\ln P$）.

证 设 $P_m=\prod_{n=1}^{m}(1+a_n)$，$S_m=\sum_{n=1}^{m}\ln(1+a_n)$，则

$$P_m=e^{S_m} \quad 或 \quad S_m=\ln P_m,$$

可知，等式两边有相同的敛散性. 在收敛时，对等式两边取 $m\to\infty$ 的极限，即得

$$P=\lim_{m\to\infty}P_m=e^{\lim\limits_{m\to\infty}S_m}=e^S（或\ S=\ln P），$$

还可写作 $$\ln\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n).$$

例 10 证明：$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 绝对收敛.

证 由例 9 知，$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+|a_n|)$ 有相同的敛散性. 现证 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+|a_n|)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}|\ln(1+a_n)|$ 有相同的敛散性. 因为，当 $a_n \geqslant 0$ 时，有

$$\ln(1+|a_n|)=\ln(1+a_n)=|\ln(1+a_n)|;$$

当 $a_n<0$ 时，有 $1-|a_n|<1/(1+|a_n|)$. 而

$$\ln(1+a_n)=\ln(1-|a_n|)<-\ln(1+|a_n|).$$

所以
$$|\ln(1+a_n)|>\ln(1+|a_n|).$$

故当 $\sum_{n=1}^{\infty}|\ln(1+a_n)|$ 收敛时，有 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+|a_n|)$ 收敛.

反之，若 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+|a_n|)$ 收敛，则 $\ln(1+|a_n|)\to 0$，即 $1+|a_n|\to 1$，$a_n\to 0$. 如例 8，设 $|a_n|<1/2$，则

$$1+a_n=1-|a_n|>\frac{1}{1+2|a_n|}.$$

于是
$$\ln(1+a_n)>-\ln(1+2|a_n|),$$

从而
$$|\ln(1+a_n)|<\ln(1+2|a_n|)\leqslant\ln(1+2|a_n|+|a_n|^2)$$
$$=2\ln(1+|a_n|),$$

知 $\sum_{n=1}^{\infty}|\ln(1+a_n)|$ 也收敛，即

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)\text{ 绝对收敛 }\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)\text{ 绝对收敛}.$$

由本例与例 9 可知：无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 具有项的可交换性的充要条件是 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛，即 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛等价于 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 绝对收敛，而级数绝对收敛具有项的可交换性，且交换后的级数和不变. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n')=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$，故

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n')=e^{\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n')}=e^{\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)}=\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n).$$

从而知条件是充分必要的（$\{a_n'\}$ 是 $\{a_n\}$ 的一个重排）.

例 11 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明：若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收

敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散，则 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散，且发散于零.

证 因为$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\overset{L'}{=\!=}\frac{1}{2}$，由 $a_n\to 0$，故$\exists\ N_1\in\mathbf{N}$，$\forall\ n>N_1$，有 $|\ln(1+a_n)-a_n|<ka_n^2(k>1/2)$. 于是

$$\left|\sum_{l=n}^{n+k}\ln(1+a_l)-\sum_{l=n}^{n+k}a_l\right|\leqslant\sum_{l=n}^{n+k}|\ln(1+a_l)-a_l|<k\sum_{l=n}^{n+k}a_l^2.$$

当 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛时，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N_2\in\mathbf{N}$，$\forall\ n>N_2$ 及 $k\geqslant 0$，有

$$\sum_{l=n}^{n+k}a_l^2<\frac{\varepsilon}{2k},\qquad \left|\sum_{l=n}^{n+k}a_l\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而，对 $n>\max\{N_1,N_2\}$，有

$$\left|\sum_{l=n}^{n+k}\ln(1+a_l)\right|\leqslant\left|\sum_{l=n}^{n+k}a_l\right|+k\sum_{l=n}^{n+k}a_l^2<\varepsilon,$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 收敛，则依例 9 知，$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛.

当 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散时，由第一个极限式可得 $a_n-\ln(1+a_n)>k_1a_n^2$ $(0<k_1<1/2)$. 于是，当 $n>N$ 时，有

$$\sum_{l=N}^{n}\ln(1+a_l)<\sum_{l=N}^{n}a_l-k_1\sum_{l=N}^{n}a_l^2.$$

显然，$\sum_{l=N}^{n}a_l$ 为有限数(因为 $\sum_{l=N}^{n}a_l$ 收敛)，而 $\sum_{l=N}^{n}a_l^2$ 发散使得 $k_1\sum_{l=N}^{n}a_l^2$ $\to\infty$，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_l)\to-\infty$，故 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散，而

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=\lim_{n\to\infty}\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\ln\prod_{n=1}^{m}(1+a_n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\sum_{n=1}^{m}\ln(1+a_n)}=\mathrm{e}^{-\infty}=0.$$

即 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散于零.

第八章　函数项级数与幂级数

第一节　一致收敛性

主 要 内 容

一、函数列的一致收敛性

1. 定义在同一数集 E 上的一列函数 $f_1,f_2,\cdots,f_n,\cdots$ 称为定义在 E 上的函数列,记作 $\{f_n\}$.

2. 若函数列 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛($x_0\in E$),则称 $\{f_n\}$ 在 x_0 收敛,x_0 称为 $\{f_n\}$ 的收敛点.若 $\{f_n\}$ 在数集 $D\subset E$ 上每一点都收敛,则称 $\{f_n\}$ 在数集 D 上收敛.$\{f_n(x)\}$ 称为 $\{f_n\}$ 的极限函数,记作

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\ x\in D \quad 或 \quad f_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}f(x),\ x\in D.$$

使函数列 $\{f_n\}$ 收敛的全体收敛点的集合称为函数列 $\{f_n\}$ 的收敛域.

3. 设函数列 $\{f_n\}$ 与函数 f 都定义在数集 D 上,若 $\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N\in\mathbf{N}$,使 $n>N$ 时,$\forall\ x\in D$,有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则称函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛于 f,记作

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x)\ (n\to\infty),\ x\in D.$$

4. 函数列一致收敛的柯西准则　函数列 $\{f_n\}$ 在数集 D 上一致收敛的充要条件是:$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N\in\mathbf{N}$,对 $n,m>N$ 和一切 $x\in$

D，有 $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$.

5. 函数列 $\{f_n\}$ 在区间 D 上一致收敛于 f 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0.$$

二、函数项级数的一致收敛性

1. 设 $\{u_n(x)\}$ 是定义于数集 E 上的一个函数列，则表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x),\ x\in E$$

称为 E 上的函数项级数.

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x),\ x\in E,\ n=1,2,\cdots$$

称为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的部分和函数列.

2. 若 $x_0\in E$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛，则称 x_0 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛点. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在数值 $D\subset E$ 上每一点收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上收敛. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的全体收敛点的集合称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域.

对 $x\in D$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和 $S(x)$ 是定义在 D 上的一个函数，称为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数. 记作

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x),\quad 即\quad \lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x).$$

3. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的部分和函数列 $\{S_n(x)\}$ 在数集 D 一致收敛于函数 $S(x)$，则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$.

4. 函数项级数收敛的柯西准则　函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛的充要条件是：$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ N \in \mathbf{N}$，使 $n > N$ 时，$\forall\ x \in D$ 和 $p \in \mathbf{N}$，有

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

当 $p = 1$ 时，即得函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛的必要条件：函数列 $\{u_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于零.

5. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛于 $S(x)$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|R_n(x)| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|S(x) - S_n(x)| = 0,$$

其中 $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ 称为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的余项.

6. 维尔斯特拉斯判别法　设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 为数集 D 上的函数项级数，$\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ 是收敛的正项级数. 若对一切 $x \in D$，有

$$|u_n(x)| \leqslant M_n,\ n = 1,2,\cdots,$$

则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上一致收敛. 维尔斯特拉斯判别法又称为 M 判别法或优级数法，$\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的优级数.

7. 阿贝尔判别法　设(1) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛；(2) $\forall\ x \in D$，$|v_n(x)|$ 单调；(3) $|v_n(x)|$ 在 D 上一致有界，即存在正数 M，对一切 $x \in D$ 和一切正整数 n，有 $|v_n(x)| < M$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

8. 狄利克雷判别法　设(1) $\sum_{i=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和函数列 $\left\{\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right\}$ 在 D 上一致有界；(2) $\forall x \in D$，$\{v_n(x)\}$ 单调；(3) $|v_n(x)|$ 在 D 上一致收敛于零，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

疑难解析

1. 为什么要研究函数列的一致收敛性？怎样理解函数列在 D 上的一致收敛性？

答　研究函数列，不仅要讨论其在某点的敛散性，更重要的是要研究函数列的极限函数的解析性质. 如由 f_n 的连续性判断 $f(x)$ 的连续性；研究 $f(x)$ 的导数与积分同 f_n 的导数与积分的关系. 这就要求讨论函数列 $\{f_n\}$ 在数集 D 上的一致收敛性.

函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛时，$\forall \varepsilon > 0, x \in D$，总 $\exists N(\varepsilon)$（即 N 只与 ε 有关，与 x 无关），只要 $n > N$，即有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

从而知，$\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛，则必在 D 上每一点收敛. 反之不一定成立. 例如 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上收敛但不一致收敛. 因为，当 $n \to \infty$ 时，有

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(1-x)x^k \to S(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

所以级数收敛. 但是和函数 $S(x)$ 不连续，说明级数在 $[0,1]$ 上不一致连续.

函数列 $\{f_n\}$ 不一致收敛于 f，从几何意义上可以理解为：$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n > N$，曲线 $y = f_n(x)$ 不都落在以曲线 $y =$

$f(x)+\varepsilon$ 和 $y=f(x)-\varepsilon$ 为边的带形区域内.

2. 判别函数项级数 $\sum u_n(x)$（或函数列 $\{f_n\}$）在 D 上不一致收敛的方法有哪些？

答 函数项级数是将数项级数 $\sum u_n$ 的通项 u_n 换成定义在 D 上的函数 $u_n(x)$ 得到的，所以在通常意义下是逐点考虑的. 但函数项级数一致收敛的概念不再是作逐点考虑，而是在点集 D 上作整体考虑. 因此，常用的判别函数项级数 $\sum u_n(x)$（或函数列 $\{f_n\}$）在 D 上不一致收敛的方法有以下几种.

(1) 不一致收敛定义　设 $\sum u_n(x)$ 在 D 上的部分和 $S_n(x)$ 收敛于 $S(x)$，若存在某 $\varepsilon_0>0$，$\forall N\in\mathbf{N}$，$\exists n_0>N$ 及 $x_{n_0}\in D$，使得

$$|S_n(x_{n_0})-S(x_{n_0})|\geqslant\varepsilon_0$$

成立，则级数 $\sum u_n(x)$ 在 D 上不一致收敛.

(2) 柯西准则的逆否命题　$\sum u_n(x)$ 在 D 上不一致收敛的充要条件是：存在某 $\varepsilon_0>0$，$\forall n\in\mathbf{N}$，$\exists n,m>N$ 及 $x_0\in D$，使得

$$|S_n(x_0)-S_m(x_0)|\geqslant\varepsilon_0.$$

(3) 和函数法　若 $\sum u_n(x)$ 的每一项 $u_n(x)$ 在区间 $I=[a,b]$ 上连续，而和函数 $S(x)$ 在 I 上不连续，则 $\sum u_n(x)$ 在 I 上不一致连续.

(4) 一般项法　若 $\sum u_n(x)$ 的一般项 $u_n(x)$ 在 D 上不一致收敛，则 $\sum u_n(x)$ 在 D 上不一致连续.

(5) 点列法　若存在点列 $\{x_n\}\in I$，且 $n\to\infty$ 时 $x_n\to x$，但 $\{S_n(x_n)\}$ 不收敛于 $S(x)$，则 $\{S_n(x_n)\}$ 在 I 上不一致收敛.

方法、技巧与典型例题分析

一、函数列的收敛性与一致收敛性

函数列的收敛性是逐点考虑的. 当 x_0 给定时，函数列 $\{f_n(x_0)\}$ 是一个数列，可以用考察数列敛散性的方法来讨论. 当

$\{f_n(x)\}$在数集 D 上收敛时，就要讨论极限函数 $f(x)$. 函数列 $\{f_n(x)\}$在数集 D 上的一致收敛性问题，就是要讨论$\forall\ \varepsilon>0$，是否有共同的 $N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$，使得 $n>N(\varepsilon)$时，$\forall\ x\in D$，有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. 通常用充要条件来确定一致收敛性，而用疑难解析 2 中叙述的方法判定函数列$\{f_n(x)\}$在 D 上不一致收敛.

例 1 研究下列级数的敛散性，并求其和函数.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}ax^n = a + ax + ax^2 + \cdots + ax^n + \cdots\ (a \neq 0)$;

(2) $x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \cdots + (x^n - x^{n-1}) + \cdots$.

解 (1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}ax^n$ 是等比级数，已知当 $|x|<1$ 时级数收敛，$|x|>1$ 时级数发散，所以收敛域为$(-1,1)$.

在收敛域上，和函数为

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}ax^n = \frac{a}{1-x},\ x \in (-1,1).$$

(2)因为

$$S_n(x) = x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \cdots + (x^n - x^{n-1}) = x^n,$$

所以，当$|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=0$;

当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=1$;

当 $x=-1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=(-1)^n$;

当$|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\pm\infty$.

故级数收敛域为$(-1,1]$. 在收敛域上，其和函数为

$$S(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

例 2 求下列级数的收敛域：

(1) $\sum n!x^n$; (2) $\sum nx^n$; (3) $\sum \frac{x^n}{n!}$.

解 利用数项级数达朗贝尔判别法.

(1) 对一切 $x_0\neq 0$，都有

$$\left|\frac{f_{n+1}(x_0)}{f_n(x_0)}\right| = \left|\frac{(n+1)!x_0^{(n+1)}}{n!x_0^n}\right| = (n+1)|x_0| \to \infty,$$

故仅当 $x=0$ 时，级数收敛.

(2) $\left|\frac{f_{n+1}(x_0)}{f_n(x_0)}\right| = \left|\frac{(n+1)x_0^{(n+1)}}{nx_0^n}\right| = \frac{n+1}{n}|x_0| \to |x_0|$,

所以，当 $0 \leqslant x_0 < 1$ 时，级数收敛；当 $-1 < x_0 < 0$ 时，级数绝对收敛；当 $|x| > 1$ 时，级数发散. 故级数收敛域为 $(-1,1)$.

(3) 对一切 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$，有

$$\left|\frac{f_{n+1}(x_0)}{f_n(x_0)}\right| = \frac{|x_0^{n+1}|}{(n+1)!} \Big/ \frac{|x_0^n|}{n!} = \frac{|x_0|}{n+1} \to 0,$$

所以，级数收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

例 3 设对于数列 $\{a_n\}$，有有限或无穷极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$. 证明：级数 $\sum a_n x^n$, $\sum a_n n x^n$, $\sum \frac{a_n}{n} x^n$ 有相同的收敛半径.

证 对点 $x = x_0$，有三个比值，即

$$\left|\frac{f_{n+1}(x_0)}{f_n(x_0)}\right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x_0| \to \rho|x_0|,$$

$$\left|\frac{f_{n+1}(x_0)}{f_n(x_0)}\right| = \frac{n+1}{n}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x_0| \to \rho|x_0|,$$

$$\left|\frac{f_{n+1}(x_0)}{f_n(x_0)}\right| = \frac{n}{n+1}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x_0| \to \rho|x_0|,$$

所以，当 $\rho = \infty$ 时，三级数收敛半径 $R=0$；当 $\rho=0$ 时，三级数收敛半径 $R=+\infty$；当 $0<\rho<\infty$ 时，三级数收敛半径 $R=1/\rho$. 即三个级数有相同的收敛半径.

例 4 确定下列函数列在指定区间上的一致收敛性：

(1) $f_n(x) = x^n e^{-n^2 x}$, $n=1,2,\cdots, D=[0,+\infty)$;

(2) $f_n(x) = \frac{nx}{n^2+(n+2)x}$, $n=1,2,\cdots, D=(0,+\infty)$;

(3) $f_n(x) = \sqrt{x^2+1/n^2}$，在 $\mathbf{R}$ 上；

(4) $f_n(x) = \sin(x/n)$，在 $\mathbf{R}$ 上；

(5) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$,在下列区间上:(i)$[0,1-\delta]$;(ii)$[1-\delta,1+\delta]$;(iii)$[1+\delta,+\infty)$,其中 $0<\delta<1$.

解 (1)对任意 $x\in[0,+\infty)$,有极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}x^n e^{-n^2x}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}x^n e^{-n^2x}\leqslant\lim_{n\to\infty}e^{-x}=0,$$

所以 $\{f_n(x)\}=\{x^n e^{-n^2x}\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

(2) 对任意 $x\in(0,+\infty)$,有极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{n^2+(n+2)x}=0.$$

取 $(0,+\infty)$ 上的自然数列 $x_n=n$,有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\cdot n}{n^2+(n+2)n}\right|=\frac{1}{2}>0.$$

所以 $\{f_n(x)\}=\left\{\dfrac{nx}{n^2+(n+2)x}\right\}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

(3) $\forall\, x\in\mathbf{R}$,有极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{x^2+1/n^2}=|x|,$$

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\sqrt{x^2+1/n^2}-|x|\right|=\frac{1/n^2}{\sqrt{x^2+1/n^2}+|x|}$$

$$\leqslant\frac{1/n^2}{1/n}=\frac{1}{n}<\varepsilon\ (\text{取 } N=[1/\varepsilon]),$$

所以,$\forall\,\varepsilon>0\,(\varepsilon<1)$,$\exists\, N=[1/\varepsilon]\in\mathbf{N}$,$\forall\, n>N$,$x\in\mathbf{R}$,有 $\left|\sqrt{x^2+1/n^2}-|x|\right|<\varepsilon$. 故 $\{\sqrt{x^2+1/n^2}\}$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛.

(4) $\forall\, x\in\mathbf{R}$,有极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sin(x/n)=0,$$

且 $\exists\,\varepsilon_0=1/2>0$,$\forall\, N\in\mathbf{N}$,$\exists\, n_0>N$,$x_0=n_0\pi/2\in\mathbf{R}$,有

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\sin\frac{n_0(\pi/2)}{n_0}\right|=\sin(\pi/2)=1>1/2.$$

所以 $\{\sin(x/n)\}$ 在 $\mathbf{R}$ 上不一致收敛.

(5) $\forall\ x\in[0,+\infty)$，有极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1/2, & x=1,\\ 1, & 1<x<+\infty.\end{cases}$$

(i) $\forall\ x\in[0,1-\delta)$，有

$$\sup\{|f_n(x)-f(x)|\}=\sup\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}\leqslant(1-\delta)^n\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

所以$\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$在$[0,1-\delta)$上一致收敛.

(ii) $\forall\ x\in(1,1+\delta)$，有

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{x^n}{1+x^n}-1\right|=\frac{1}{1+x^n},$$

故$\exists\ \varepsilon_0=1/4>0,\forall\ N\in\mathbf{N},\exists\ m>N$和$x_0=\sqrt[m]{2}\in(1,1+\delta)$，使得

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|=\frac{1}{1+x_0^m}=\frac{1}{3}>\frac{1}{4},$$

从而知$\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$在$(1,1+\delta)$内即$[1-\delta,1+\delta]$上不一致收敛.

(iii) $\forall\ x\in[1+\delta,+\infty)$，有

$$\sup\{|f_n(x)-f(x)|\}=\sup\left\{\frac{1}{1+x^n}\right\}\leqslant\frac{1}{1+(1+\delta)^n}\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

所以$\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$在$[1+\delta,+\infty)$上一致收敛.

例 5 α为何值时，函数序列

$$f_n(x)=\frac{x(\ln n)^\alpha}{n^x},\ n=2,3,4,\cdots$$

在$[0,+\infty)$上一致收敛？

解 因为$f'_n(x)=\frac{(\ln n)^{\alpha+1}}{n^x}\left(\frac{1}{\ln n}-x\right)$，故当$x<\frac{1}{\ln n}$时，$f_n(x)$单调增加；当$x>\frac{1}{\ln n}$时，$f_n(x)$单调减少，故在$x=\frac{1}{\ln n}$处$f_n(x)$取最大值. 从而，极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0,$$

$$
\begin{aligned}
&\sup|f_n(x)-f(x)| \\
&=\max|f_n(x)|=f_n\left(\frac{1}{\ln n}\right)=\frac{1}{n^{1/\ln n}}(\ln n)^{\alpha-1} \\
&=\frac{1}{\mathrm{e}}(\ln n)^{\alpha-1}=\begin{cases}\not\to 0, & \alpha\geqslant 1, \\ \to 0, & \alpha<1\end{cases} \quad (n\to\infty),
\end{aligned}
$$

故当且仅当 $\alpha<1$ 时，$\{f_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

本例是用放大法求解的. 一般地，放大法求得的是一致收敛的充分条件. 但本例中，$\alpha_n=\max|S_n(x)-S(x)|$，当 $n\to\infty$ 时 $\alpha_n\to 0$ 是充要条件.

例 6 设 $f_1(x)$ 在 $[a,b]$ 上正常可积，且

$$f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t,\ n=1,2,\cdots,$$

证明：函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于零.

证 因为 $f_1(x)$ 在 $[a,b]$ 上正常可积，故在 $[a,b]$ 上有界，即 $\exists M>0$，使得 $|f_1(x)|\leqslant M$ $(\forall\ x\in[a,b])$. 有

$$|f_2(x)|\leqslant\int_a^x|f_1(t)|\mathrm{d}t\leqslant M(x-a),$$

所以，通常有 $|f_n(x)|\leqslant\dfrac{M(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}$，则

$$
\begin{aligned}
|f_{n+1}(x)|&\leqslant\int_a^x|f_n(t)|\mathrm{d}t=\frac{M}{(n-1)!}\int_a^x(t-a)^{n-1}\mathrm{d}t \\
&=\frac{M(x-a)^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

从而 $$|f_n(x)|\leqslant\frac{M(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

即对 $x\in[a,b]$，$\{f_n(x)\}$ 一致收敛于零.

例 7 讨论下列函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上的一致收敛性：

(1) $f_n(x)=\dfrac{ax}{1+n^2x^2}$ $(a>0)$； (2) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.

解 (1) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{ax}{1+n^2x^2}=0$，且

$$f_n(x)=\frac{ax}{1+n^2x^2}=\frac{a}{2n}\cdot\frac{2nx}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{a}{2n},$$

故$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N=a/(2\varepsilon)$,当$n>N$时,$\forall\ x\in[0,1]$,有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

所以,$\{f_n(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛于零.

(2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx}{1+n^2x^2}=0$. 又由微分法可知,当$x=1/n$时,$f_n(x)$有最大值

$$\max_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=1/2.$$

所以,$f_n(x)$在$[0,1]$不一致收敛.

例 8 若函数列$\{f_n(x)\}$在开区间(a,b)内的任一闭区间上都一致收敛,那么$\{f_n(x)\}$在(a,b)内是否一致收敛?

解 不一定. 例如函数列$\{x_n\}$在$(0,1)$内是内闭一致收敛的,但在$(0,1)$内不一致收敛.

因为$\forall\ x\in(0,1)$,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$,故$\forall\ [a,b]\subset(0,1)$. 有

$$\lim_{n\to\infty}\sup|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\max|x^n|=\lim_{n\to\infty}b^n=0,$$

即$\{x^n\}$在$[a,b]\subset(0,1)$内一致收敛. 但在$(0,1)$内有

$$\lim_{n\to\infty}\sup|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup|x^n|=\lim_{n\to\infty}1\neq 0,$$

即$\{x^n\}$在$(0,1)$内不一致收敛.

例 9 证明:在有限个开区间$I_i\ (i=1,2,\cdots,m)$上都一致收敛的函数列$\{f_n(x)\}$,在$\bigcup\limits_{i=1}^{m}I_i$上也一致收敛. 但当$i$为无限时,$\{f_n(x)\}$在$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i$上不一定一致收敛.

证 当i为有限时,由于$\{f_n(x)\}$在I_i上一致收敛,则$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N_i\in\mathbf{N}$,当$n>N_i$时,$\forall\ x\in I_i$,有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

取$N=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_m\}$,则当$n>N$时,$\forall\ x\in\bigcup\limits_{i=1}^{m}I_i$,有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

即$\{f_n(x)\}$，在$\bigcup\limits_{i=1}^{m} I_i$上一致收敛.

当i为无限时，例如函数列$\left\{\frac{n+1}{n}x\right\}$在$I_i=(i-1,i+1)$ $(i=1,2,\cdots)$上极限函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}x=x$，且

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I_i}\left|\frac{n+1}{n}x-x\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{i+1}{n}=0,$$

所以，$\left\{\frac{n+1}{n}x\right\}$在$I_i$ $(i=1,2,\cdots)$上一致收敛. 但当取$x_n=n$时，有

$$\lim_{n\to\infty}|f_n(x_n)-f(x_n)|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\cdot n-n\right|=1>0,$$

故函数列$\left\{\frac{n+1}{n}x\right\}$在$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i$上不一致收敛.

例 10 证明狄尼(Dini)定理 设函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上单调且收敛于连续函数$f(x)$，若$f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$上连续，则$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛.

证 因为$\forall\, x\in[a,b]$，设$f_n(x)>f_{n+1}(x)$，令$\varphi_n(x)=f_n(x)-f_{n+1}(x)\geqslant 0$，则$\varphi_n(x)$在$[a,b]$上连续且单调减少，且$\forall\, x\in[a,b]$，$\varphi_n(x)\to 0$ $(n\to\infty)$.

设$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上不一致收敛于$f(x)$，则$\varphi_n(x)$不一致收敛于零. 即$\exists\,\varepsilon_0>0$，$\forall\, m\in\mathbf{N}$，$\exists\, n_m>m$及$x_m\in[a,b]$，使得$\varphi_{n_m}(x_m)>\varepsilon_0$. 于是，得数列$\{n_m\}$和$\{x_m\}$ $(x_m\in[a,b])$. 由聚点定理，$\{x_m\}$至少有一聚点$x_0\in[a,b]$，且$\{x_n\}$有收敛于x_0的子列$\{x_{m_k}\}$：$x_{m_k}\to x_0$及$\varphi_{n_{m_k}}(x_{m_k})>\varepsilon_0$ $(k\to\infty)$.

因为$\forall\, n\in\mathbf{N}$，$\exists\, k\in\mathbf{N}$，使得$n_{m_k}>m_k>k>n$，故$\forall\, x_{m_k}\in[a,b]$，有$\varphi_n(x_{m_k})\geqslant\varphi_{n_{m_k}}(x_{m_k})\geqslant\varepsilon_0$.

对任意n，考虑$\varphi_n(x)$的连续性，有

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_n(x_{m_k})=\varphi_n(x_0)\geqslant\varepsilon_0$$

与已知$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)=0$矛盾. 故由反证法确认$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一

致收敛.狄尼定理对函数项级数 $\sum u_n(x)$ 也成立.

例 11 利用狄尼定理证明:在$[0,1]$上,函数列$\{(1+x/n)^n\}$一致收敛于 e^x,并由此得出函数列$\{1/[e^{x/n}+(1+x/n)^n]\}$一致收敛.

证 因为 $f_n(x)=(1+x/n)^n$ 在$[0,1]$上单调增加并趋向于 e^x,而 e^x 在$[0,1]$上连续,由狄尼定理,$\{(1+x/n)^n\}$一致收敛于 e^x.

又
$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}1/[e^{x/n}+(1+x/n)^n]$$
$$=f(x)=1/(1+e^x)$$

而
$$|f_n(x)-f(x)|$$
$$=\left|\frac{1+e^x-e^{x/n}-(1+x/n)^x}{[e^{x/n}+(1+x/n)^n](1+e^x)}\right|$$
$$\leqslant|e^x-(1+x/n)^n|+|e^{x/n}-1|$$
$$\leqslant|e-(1+x/n)^n|+|e^{1/n}-1|\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

故$\{1/[e^{x/n}+(1+x/n)^n]\}$在$[0,1]$上一致收敛.

例 12 证明:设 $f(x)$在$[0,1]$上连续,且 $f(1)=0$,则函数列$\{g_n(x)\}=\{f(x)x^n\}$ $(n=1,2,\cdots)$在$[0,1]$上一致收敛.

证 用分区间讨论法证明.因为 $f(x)$在$[0,1]$上连续,故$\exists$ $M>1$,使得$\forall$ $x\in[0,1]$,$|f(x)|<M$;由 $f(1)=0$ 知,$\forall$ $\varepsilon>0$,$\exists$ $\delta>0$,当 $1-\delta<x<1$ 时,有$|f(x)|<\varepsilon$.而当 $x\in[0,1-\delta]$时,有
$$|g_n(x)|=|f(x)x^n|\leqslant M(1-\delta)^n.$$

又当 $x\in[1-\delta,1]$时,$|g_n(x)|<\varepsilon$.不妨取正整数 $N>\ln(\varepsilon/M)\big/\ln(1-\delta)$,则当 $n>N$ 时,有 $|g_n(x)|<\varepsilon$.所以$\{g_n(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛于零.

例 13 证明:若函数列$\{f_n\}$在 $D\subset\mathbf{R}$ 上一致收敛于 f,则$\{|f_n|\}$在 D 上一致收敛于$|f|$.

证 若$\{f_n\}$一致收敛于 f,则$\forall$ $\varepsilon>0$,$\exists$ $N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$,当$n>N(\varepsilon)$时,$\forall$ $x\in D$,恒有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

因为$|f_n(x)|-|f(x)|\leqslant|f_n(x)-f(x)|$,所以

$$\big||f_n(x)| - f(x)\big| < \big||f_n(x) - f(x)|\big|$$
$$= |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

于是，对定义在 $D\subset\mathbf{R}$ 上的函数列 $\{|f_n|\}$，存在函数 $|f|:D\to\mathbf{R}$，满足：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$，当 $n>N(\varepsilon)$ 时，$\forall\ x\in D$，恒有

$$\big||f_n(x)| - |f(x)|\big| < \varepsilon,$$

即 $\{|f_n|\}$ 在 D 上一致收敛于 $|f|$.

例 14 证明：若 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 在 D 上分别一致收敛于 f 和 g，则 $\{f_n\pm g_n\}$ 在 D 上一致收敛于 $f\pm g$.

证 由题设知，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N_1(\varepsilon)\in\mathbf{N}$，当 $n>N_1(\varepsilon)$ 时，$\forall\ x\in D$，有 $|f_n-f|<\varepsilon/2$；$\forall$ 同一 $\varepsilon>0$，$\exists\ N_2(\varepsilon)\in\mathbf{N}$，当 $n>N_2(\varepsilon)$ 时，$\forall\ x\in D$，有 $|g_n-g|<\varepsilon/2$. 于是，关于 $\{f_n+g_n\}$，$\forall\ \varepsilon>0$，取 $N(\varepsilon)=\max\{N_1(\varepsilon),N_2(\varepsilon)\}\in\mathbf{N}$，，当 $n>N(\varepsilon)$ 时，$\forall\ x\in D$，恒有

$$|(f_n+g_n)-(f+g)|$$
$$=|(f_n-f)+(g_n-g)|<|f_n-f|+|g_n-g|$$
$$<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

所以，$\{f_n+g_n\}$ 在 D 上一致收敛于 $f+g$.

类似可证，$\{f_n-g_n\}$ 在 D 上一致收敛于 $f-g$.

二、函数项级数的收敛性与一致收敛性

函数项级数的收敛性与一致收敛性的讨论比函数列的要复杂一些，方法也更灵活. 特别是函数项级数一致收敛性判别，可以用定义、充要条件、柯西准则、M 判别法、阿贝尔判别法、狄利克雷判别法及由此引出的其它方法. 使用这些方法时只有先认真验证条件，才能引用结论，防止出现错误. 而判定级数不一致收敛可以用疑难解析 2 中指出的方法.

例 15 确定下列级数的收敛域：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{(n^2-3n+2)^x}$；　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}$.

解 (1) $u_n(x)=(-1)^n\dfrac{x}{(n^2-3x+2)^x}$，讨论 x 的取值.

当 $x=0$ 时,级数显然收敛.

当 $x<0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)$ 不存在,级数是发散的.

当 $x>0$ 时,$|u_n(x)|\sim\dfrac{x}{n^{2x}}\ (n\to\infty)$. 而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x/n^{2x}$ 当 $x>1/2$ 时收敛,当 $x\leqslant 1/2$ 时发散. 由比较审敛法的极限形式知,原级数在 $x>1/2$ 时绝对收敛. 在 $0<x<1/2$ 时不绝对收敛,但

$$
\begin{aligned}
|u_{n+1}(x)|-|u_n(x)|&=\frac{x}{(n^2-n)^x}-\frac{x}{(n^2-3n+2)^x}\\
&=x\left[\frac{1}{(n^2-n)^x}-\frac{1}{(n^2-3n+2)^x}\right]<0,
\end{aligned}
$$

且有 $|u_n(x)|\xrightarrow{n\to\infty}0$. 故依莱布尼茨判别法知,原级数收敛.

(2) 因为 $\forall\, x\in(-\infty,+\infty)$, $\dfrac{1}{1+x^2}<1$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 为$(-\infty,+\infty)$ 内公比 $|q|<1$ 的等比级数,是收敛的. 从而原级数在$(-\infty,+\infty)$ 内绝对收敛.

将 $S(x)$ 的项重组. 先对奇数项求和,得

$$
\begin{aligned}
&-x^2\left[\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{(1+x^2)^3}+\cdots+\frac{1}{(1+x^2)^{2k+1}}+\cdots\right]\\
&=-x^2\,\frac{1/(1+x^2)}{1-1/(1+x^2)^2}=\frac{-1-x^2}{2+x^2};
\end{aligned}
$$

再对偶数项求和,得

$$
\begin{aligned}
&x^2\left[\frac{1}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{(1+x^2)^4}+\cdots+\frac{1}{(1+x^2)^{2k}}+\cdots\right]\\
&=x^2\,\frac{1/(1+x^2)^2}{1-1/(1+x^2)^2}=\frac{1}{2+x^2}.
\end{aligned}
$$

于是,级数和函数 $S(x)=\dfrac{-1-x^2}{2+x^2}+\dfrac{1}{2+x^2}=-\dfrac{x^2}{2+x^2}$.

例 16 证明:对级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^x}$,存在 $-\infty\leqslant r\leqslant+\infty$,使得当 $x<r$ 时级数发散,当 $x>r$ 时级数收敛.

证　先证：若对某 $\lambda \in (-\infty, +\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛，则 $\forall\, x > \lambda$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 也收敛.

因为，当 $x > \lambda$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda} \cdot \frac{1}{n^{x-\lambda}}$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 一致收敛，$\left\{\frac{1}{n^{x-\lambda}}\right\}$ 单调减少并趋向于零，故依阿贝尔判别法知，原级数在 $(\lambda, +\infty)$ 上一致收敛.

再证 r 的存在性. 若 $\forall\, x \in (-\infty, +\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 发散，则可取 $r = +\infty$（或 $-\infty$）.

若有 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$，使得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_1}}$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_2}}$ 收敛，则知 $x_1 < x_2$. 令 E 为非空有界集，即

$$E = \left\{x \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}\ \text{收敛}\right\},$$

有 $r = \inf E$ 存在. 因为 $\{x_n\} \subset E$，使对每一 $x_n > r$，且 $n \to \infty$ 时 $x_n \to r$.

若 $x > r$，则 $\exists\, x_N \in E$，使得 $x > x_N > r$，从而知 $x \in E$，即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 收敛. 若 $x < r$，则因为 $r = \inf E$，从而知 $x \overline{\in} E$，即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 发散.

例 17　确定下列级数在给定区间上的一致收敛性：

(1) $\frac{x}{1+x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{x}{1+n^2x^2} - \frac{x}{1+(n-1)^{2x^2}}\right]$，$[0,1]$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+\sin^2 x}$，$(-\infty, +\infty)$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$，$(-\infty, +\infty)$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right),[-1,1]$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x},(0,+\infty)$.

解 (1) 因为 $S_n(x)=\frac{x}{1+n^2x},\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0$,所以,在$[0,1]$上级数处处收敛于零. 又由于

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{x}{1+n^2x^2}=\frac{1}{2n}\cdot\frac{2nx}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{1}{2n},$$

故$\forall\ \varepsilon>0$,只要取 $N=[1/(2\varepsilon)]$,则当 $n>N$ 时,$\forall\ x\in[0,1]$,恒有$|S_n(x)-0|\leqslant 1/(2n)<\varepsilon$. 故依定义,级数在$[0,1]$上一致收敛.

(2) 因为$\forall\ x\in(-\infty,+\infty)$,原级数满足莱布尼茨条件,故在$(-\infty,+\infty)$上收敛.

又
$$|R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{\sin x+k}\right|<\frac{1}{n+\sin^2x}<\frac{1}{n+1},$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|R_n(x)|=0,$$

故原级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

但是,$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n+\sin^2x}\right|\Big/\frac{1}{n}=1$,因$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,故$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n+\sin^2x}\right|$ 发散,原级数条件收敛.

(3) 因为$\forall\ x\in(-\infty,+\infty)$和$n\in\mathbf{N}$,不等式$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$恒成立,且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛. 故依 M 判别法知,原级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(4) 因为$\forall\ x\in[-1,1]$,

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^k}{k}-\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(x-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup|S_n(x)-S(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\frac{|x|^{n+1}}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$,

故原级数在$[-1,1]$上一致收敛.

(5) 因为$\frac{1}{1+n^2x}<\frac{1}{n^2x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{n^2}$. 当 x 值取定时,由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x}$在$(0,+\infty)$内处处收敛. 但是,仅当 $n>[1/\sqrt{x\varepsilon}]$时

$$\left|\frac{1}{1+n^2x}-0\right|<\left|\frac{1}{n^2x}\right|<\varepsilon,$$

从而 N 与 ε 和 x 都有关,故原级数在$(0,+\infty)$上不一致收敛.

例 18 确定下列级数在给定区间上的一致收敛性:

(1) $\frac{1}{1+x}-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(x+n-1)(x+n)}$, $x\in[0,1]$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,2^{-nx}$,

(i) $x\in(\delta,+\infty)$ $(\delta>0)$; (ii)$x\in(0,+\infty)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$, $x\in[-\delta,\delta]$ $(\delta>0)$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^n\sin^k n\theta$, $0<t<1$ 及 $k\geqslant0$, $(-\infty,+\infty)$.

解 (1)$\forall x\in[0,1]$,$\frac{1}{1+x}$是确定的值. 对级数部分,因为

$$|u_n|=\left|\frac{1}{(x+n-1)(x+n)}\right|<\frac{1}{n(n-1)}<\frac{1}{(n-1)^2},$$

而$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2}$收敛,故依M判别法知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n-1)(x+n)}$一致收敛. 于是,原级数在$[0,1]$上一致收敛.

(2) (i) $\forall x\in[\delta,+\infty)$ 和 $n\in\mathbf{N}$,有

$$|u_n(x)|=\sqrt{n}\,2^{-nx}\leqslant\sqrt{n}\,2^{-n\delta}.$$

记 $M_n=\sqrt{n}\,2^{-n\delta}$,则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M_{m+1}}{M_m}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}2^{-\delta}=2^{-\delta}<1.$$

由比值法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ 收敛，又由 M 判别法知，原级数在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛.

(ii) 在 $(0,+\infty)$ 上，因为 $\{\sqrt{n}\,2^{-nx}\}$ 当 $\varepsilon_0=1/2$ 时，若取 $x_n=1/n\in(0,+\infty)$，则有

$$|u_n(x)|=\sqrt{n}\,2^{-n\cdot 1/n}=\sqrt{n}/2>1/2=\varepsilon_0,$$

从而知 $\{u_n(x)\}$ 在 $(0,+\infty)$ 内不一致收敛于零，故原级数在 $(0,+\infty)$ 内不一致收敛.

(3) 因为，在 $[-\delta,\delta]$ 上有

$$\left|1-\cos\frac{x}{n}\right|=\left|2\sin^2\frac{x}{2n}\right|<2\left(\frac{x}{2n}\right)^2\leqslant\frac{\delta^2}{2n^2},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，依 M 判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$ 在 $[-\delta,\delta]$ $(\delta>0)$ 上一致收敛.

(4) 因为 $S_m(\theta)=\sum_{n=1}^{m}t^m\sin^k n\theta$，则当 $m>n$ 时，有

$$\begin{aligned}&|S_m(\theta)-S_n(\theta)|\\&=|t^{n+1}\sin^k(n+1)\theta+t^{n+2}\sin^k(n+2)\theta+\cdots+t^m\sin^k m\theta|\\&\leqslant t^{n+1}|\sin^k(n+1)\theta|+t^{n+2}|\sin^k(n+2)\theta|+\cdots+t^m|\sin^k m\theta|\\&\leqslant t^{n+1}+t^{n+2}+\cdots+t^m.\end{aligned}$$

由题设 $0<t<1$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}t^n$ 收敛，其部分和数列为柯西数列. 故 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，$\forall\ m>n>N$，恒有

$$\left|\sum_{k=0}^{m}t^k-\sum_{k=0}^{n}t^k\right|=t^{n+1}+t^{n+2}+\cdots+t^m<\varepsilon,$$

所以 $$|S_m(\theta)-S_n(\theta)|<\varepsilon.$$

其中 N 与 θ 无关，从而知 $\sum_{n=1}^{\infty}t^n\sin^k n\theta$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

例 19 证明：若函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$在区间$I$上一致收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$也在$I$上一致收敛. 反之，是否成立？

证 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$在$I$上一致收敛，则依柯西准则，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，$\forall\ n>N$和$p\in\mathbf{N}$，$\forall\ x\in I$，有$\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}|f_k(x)|<\varepsilon$，即

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}f_k(x)\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}|f_k(x)|<\varepsilon.$$

从而，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$I$上一致收敛.

反之，不一定成立. 如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$在$[0,1]$上一致收敛. 可用分区间法证明：因为

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(1-x)x^k=(1-x)\sum_{n=1}^{n}(-x)^k$$
$$=-\frac{x(1-x)[1-(-x)^n]}{1+x},$$

在$[0,1)$上， $S(x)=\lim S_n(x)=-\dfrac{x(1-x)}{1+x}$.

当$x=1$时，上式也成立，即$S(x)=-\dfrac{x(1-x)}{1+x}$，$x\in[0,1]$.

$$|S(x)-S_n(x)|=\left|\frac{(1-x)(-x)^{n+1}}{1+x}\right|\leqslant(1-x)x^{n+1}.$$

$\forall\ x\in[1-\varepsilon,1]$ $(\varepsilon>0)$，$\forall\ n\in\mathbf{N}$，有

$$|S(x)-S_n(x)|\leqslant(1-x)x^{n+1}\leqslant1-x\leqslant\varepsilon.$$

$\forall\ x\in[0,1-\varepsilon]$，要使

$$|S(x)-S_n(x)|\leqslant(1-x)x^{n+1}\leqslant x^{n+1}\leqslant(1-\varepsilon)^{n+1}<\varepsilon$$

成立，须有$n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln(1+\varepsilon)}-1$. 故当取$N=\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln(1+\varepsilon)}-1\right]$时上

述不等式成立. 从而$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$在两区间上都一致收敛，即在$[0,1]$上一致收敛.

但 $$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n(1-x)x^n|=\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n,$$

有 $$S_n(x)=1-x^n \quad (x\neq 1),$$

故 $$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}0, & x=1,\\ 1, & 0\leqslant x<1,\end{cases}$$

取 $\varepsilon_0=1/3>0$，则$\exists\ N\in\mathbf{N}$，$\exists\ n_0>N$，$\exists\ x_0=1-1/n_0\in[0,1)$，使得

$$|S(x_0)-S_n(x_0)|=(1-1/n_0)^{n_0}>1/3.$$

这里$\lim_{n\to\infty}(1-1/n)^n=1/e>1/3$，所以，当$n_0$充分大时上式成立.

即$\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$在$[0,1]$上不一致收敛.

例 20 证明：若函数列$\{a_n\}$单调且收敛于零，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$在$[a,2\pi-a]$ $(0<a<\pi)$上一致收敛，并由此得出$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos nx$在$[a,2\pi-a]$上一致收敛.

证 设$u_n(x)=\cos nx, v_n(x)=a_n$，当$x\in[a,2\pi-a]$时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|=\left|\frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2\sin(x/2)}+\frac{1}{2},$$

即$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的部分和一致有界，而$v_n(x)$单调且一致趋向于零，依狄利克雷判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$在$[a,2\pi-a]$上一致收敛.

当$a_n=\frac{1}{n}$时，有$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos nx$在$[a,2\pi-a]$上一致收敛. 但$a\neq 0$，因为$\frac{1}{n}\cos nx$在$[0,2\pi]$上连续，但当$x=0$时，级数成为

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$,是发散的,故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos nx$在$(0,\beta)$ $(0<\beta<2\pi)$内不一致收敛,即在$[0,2\pi]$上不一致收敛.

例 21 证明:函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\frac{1}{n!}\int_0^x t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$在$[0,+\infty)$上一致收敛的充要条件是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

证 设$u_n(x)=a_n\frac{1}{n!}\int_0^x t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

充分性 由分部积分法,积分n次得

$$u_n(x)=a_n[1-(1+x+x^2/2+\cdots+x^n/n)\mathrm{e}^{-x}].$$

令 $$b_n(x)=1-(1+x+x^2/2+\cdots+x^n/n)\mathrm{e}^{-x},$$

则$b_n(x)$在$[0,+\infty)$上单调减少并一致有界.由阿贝尔判别法知,当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛时,原级数在$[0,+\infty)$上一致收敛.

必要性 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[0,+\infty)$上一致收敛.依柯西准则,$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N\in\mathbf{N}$,当$m>n>N$时,$\forall\ x>0$,有$\left|\sum\limits_{k=n}^{m}u_k(x)\right|<\varepsilon$.令$x\to+\infty$,考虑$u_n(x)\to a_n$,得$\left|\sum\limits_{k=n}^{m}a_k\right|<\varepsilon$.所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

例 22 证明:若函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛,且函数$\varphi(x)$在$[a,b]$上有界,则函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)\varphi(x)$在$[a,b]$上也一致收敛.

证 由柯西准则,若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛,则$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N\in\mathbf{N},\forall\ n>N$和$p\in\mathbf{N},\forall\ x\in[a,b]$,有$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_n(x)\right|<\varepsilon$.又对$\varphi(x),\exists\ M>0,\forall\ x\in[a,b]$,有$|\varphi(x)|<M$.于是,有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x)\varphi(x)\right| = |\varphi(x)|\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x)\right| < M\varepsilon,$$

从而知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)\varphi(x)$ 在$[a,b]$ 上一致收敛.

例 23 证明:若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[au_n(x)+bv_n(x)]$在区间 I 上也一致收敛(a,b 为常数).

证 依题设,由柯西准则,$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N\in\mathbf{N}$,$\forall\ n>N$和$p\in\mathbf{N}$,$\forall\ x\in I$,有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x)\right| < \varepsilon,\quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} v_n(x)\right| < \varepsilon.$$

从而得

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}[au_n(x)+bv_n(x)]\right| \\
&= \left|a\sum_{k=n+1}^{n+p}u_n(x)+b\sum_{k=n+1}^{n+p}v_n(x)\right| \\
&= |a|\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_n(x)\right| + |b|\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}v_n(x)\right| \\
&< |a|\varepsilon+|b|\varepsilon = (|a|+|b|)\varepsilon,
\end{aligned}$$

即知$\sum\limits_{n=1}^{n}[au_n(x)+bv_n(x)]$在 I 上一致收敛.

例 24 证明:若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在(a,b) 内一致收敛.则适当加括号后的新级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 在(a,b) 内绝对一致收敛.

证 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 内在(a,b) 的和函数为$S(x)$,则对$\varepsilon=1/2$,$\exists\ N_1\in\mathbf{N}$,当$m>N_1$时,$\forall\ x\in(a,b)$,有$\left|\sum\limits_{k=N_1+1}^{m}u_k(x)\right|<1/2$.

$\forall\ \varepsilon=1/2^2, \exists\ N_2 \in \mathbf{N}$, 当 $m > N_2$ 时, $\forall\ x \in (a,b)$, 有 $\left|\sum_{k=N_2+1}^{m} u_k(x)\right| < 1/2^2, 1/2^3, \cdots$. 对 $\varepsilon=1/2^n, \exists\ N_n \in \mathbf{N}$, 当 $m > N_n$ 时, $\forall\ x \in (a,b)$, 有 $\left|\sum_{k=N_n+1}^{m} u_k(x)\right| < 1/2^n$.

令 $v_1(x)=\sum_{k=1}^{N_2} u_k(x), \cdots, v_n(x)=\sum_{k=N_n+1}^{N_{n+1}} u_k(x)\ (n=2,3,\cdots)$, 则 $|v_n(x)| < 1/2^n$. 当 $m > n$ 时, 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} v_k(x)\right| < \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^n},$$

故 $\forall\ \in > 0$, 当 n 充分大时, 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} v_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |v_k(x)| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

依柯西准则, $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n(x)|$ 在 (a,b) 内一致收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 在 (a,b) 内绝对一致收敛.

例 25 证明: 若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 在区间 I 上一致收敛, 函数列 $\{v_n(x)\}$ 在 I 上一致有界, 则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

证 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 在 I 上一致收敛, 依柯西准则, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbf{N}, \forall\ n > N$ 和 $p \in \mathbf{N}, \exists\ x \in I$, 有

$$|u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \cdots + |u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

又 $\{v_n(x)\}$ 在 I 上一致有界, 即 $\exists\ M > 0, \forall\ n \in \mathbf{N}, \forall\ x \in I$, 有 $|u_n(x)| \leqslant M$, 所以

$$|u_{n+1}(x)v_{n+1}(x) + u_{n+2}(x)v_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)v_{n+p}(x)|$$
$$\leqslant |u_{n+1}(x)|\,|v_{n+1}(x)| + \cdots + |u_{n+p}(x)|\,|v_{n+p}(x)|$$

$$\leqslant (|u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \cdots + |u_{n+p}(x)|)M \leqslant M\varepsilon,$$

故函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$在 I 上一致收敛.

例 26 证明:若函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛,则函数列$\{u_n(x)\}$在 I 上一致收敛于零. 反之是否成立?试举例说明.

证 因为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛,依柯西准则,$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbf{N}$,$\forall\ n > N$ 和 $p \in \mathbf{N}$,$\forall\ x \in I$,有

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

当取 $p=1$ 时,即$|u_{n+1}(x)|<\varepsilon$,知$\{u_n(x)\}$在 I 上一致收敛于零.

反之不一定成立. 例如,函数列$\{x^n/n\}$在$(0,1)$内一致收敛于零. 因为,$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N=[1/\varepsilon]\in\mathbf{N}$,$\forall\ n>N$,$\forall\ x\in(0,1)$,有

$$|x^n/n - 0| = |x|^n/n < 1/n < \varepsilon,$$

所以$\{x^n/n\}$在$(0,1)$一致收敛于零.

但$\forall\ \varepsilon_0 = 1/5 > 0$,$\forall\ N \in \mathbf{N}$,$\exists\ m > n$ 和 $p_0 = m \in \mathbf{N}$,$\exists\ x_0 = 1/\sqrt[2m]{2} \in (0,1)$,使得

$$\left|\frac{x_0^{m+1}}{m+1} + \frac{x_0^{m+2}}{m+2} + \cdots + \frac{x_0^{2m}}{2m}\right|$$

$$\geqslant m \cdot \frac{x_0^{2m}}{2m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} > \frac{1}{5} = \varepsilon_0.$$

从而,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 在$(0,1)$ 内不一致收敛.

从本例可以认识到:函数列$\{u_n(x)\}$在区间 I 上一致收敛于零只是函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的必要条件,而不是充分条件.

第二节　一致收敛的函数列与函数项级数的性质

主要内容

1. 若函数列$\{f_n\}$在区间I上一致收敛，且每一项都连续，则其极限函数$f(x)$在I上也连续.

2. 若函数列$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛，且每一项都连续，则

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

3. 若$x_0\in[a,b]$为定义在$[a,b]$上的函数列$\{f_n\}$的收敛点，$\{f_n\}$的每一项在$[a,b]$上有连续的导数，且$\{f_n'\}$在$[a,b]$上一致收敛，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x).$$

4. 若函数项级数$\sum u_n(x)$在区间$[a,b]$上一致收敛，且每一项都连续，则其和函数在$[a,b]$上也连续. 即

$$\sum\left(\lim_{x\to x_0} u_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\sum u_n(x)\right).$$

5. 若函数项级数$\sum u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛，且每一项都连续，则$\sum\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum u_n(x)\mathrm{d}x$

6. 若函数项级数$\sum u_n(x)$在$[a,b]$上每一项都有连续导函数，$x_0\in[a,b]$为$\sum u_n(x)$的收敛点，且$\sum u_n'(x)$在$[a,b]$上一致收敛，则

$$\sum\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum u_n(x)\mathrm{d}x.$$

疑难解析

1. 为什么说和函数的三个性质(连续性、可导性与可积性)关于一致收敛的条件是充分的但不是必要的?

答 设有函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right)$,其部分和$S_n(x)=\frac{n}{1+n^2x^2}$,在$[0,1]$上和函数

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+n^2x^2}=0.$$

因为,当取$\{x_n\}=\{1/n\}\subset(0,1)$时,有

$$\lim_{n\to\infty}|S_n(1/n)-S(1/n)|=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 1/n}{1+n^2\cdot 1/n^2}=\frac{1}{2}>0.$$

因此知此函数项级数在$[0,1]$上不一致收敛.

但此函数项级数各项显然在$[0,1]$上连续,且

(1) $\forall\ x_0\in[0,1]$,有

$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0}S_n(x)$, 即 $0=0$.

(2) $\int_0^1[\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)]\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x$,即

$$0=\int_0^1 0\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^2)}{2n}=0.$$

(3) 易证,此级数各项导数组成的级数在$(0,1)$内不一致收敛,但$\forall\ x\in(0,1)$,有

$$0=S'(x)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x^2}{1+(n-1)^2x^2}\right)\right]'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x^2}{1+(n-1)^2x^2}\right]'$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{k-k^2x^2}{(1+k^2x^2)^2}-\frac{(k-1)-(k-1)^2x^2}{[1+(k-1)^2x^2]}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}=0.$$

2. 若函数列 $\{f_n(x)\}$ 中每个函数 $f_n(x)$ 在任一 $x\in(a,b)$ 都不连续，是否还会有 $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 内一致收敛于连续函数？

答 有. 例如函数列 $\{f_n(x)\}$.

$$f_n(x)=\begin{cases}1/n, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

显然，每个 $f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内任一点都不连续，其极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0,\ x\in(-\infty,+\infty)$$

显然是连续的，且

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbf{R}}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

即函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛于连续函数.

由此可见，$\{f_n(x)\}$ 一致收敛与每个函数的连续性并无必然的联系.

方法、技巧与典型例题分析

利用本节的定理不只是能检验函数列或函数项级数是否满足定理中的关系式，更重要的是能由定理条件，在不求出极限函数或和函数的情况下，由函数列或函数项级数本身获得极限函数或和函数的解析性质. 同时，在讨论问题时应注意到，定理中一致收敛的条件是充分的(见疑难解析 1)，因此，有时要从更基本的定义来考虑问题.

例 1 证明下列级数在 $(-\infty,+\infty)$ 内不一致收敛，但其和函数却连续.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n^2x}{1+n^3x^2}-\frac{(n+1)^2x}{1+(n+1)^3x^2}\right\}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{nx\mathrm{e}^{-nx^2}-(n-1)x\mathrm{e}^{-(n-1)x^2}\right\}$.

证 (1) 因为部分和

$$S_m(x)=\sum_{n=1}^{m}\left\{\frac{nx^2}{1+n^3x^2}-\frac{(n+1)^2x}{1+(n+1)^3x^2}\right\}$$

$$=\frac{x}{1+x^2}-\frac{(m+1)^2x}{1+(m+1)^3x}\xrightarrow{m\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=S(x),$$

$S(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是连续的. 由于余项

$$r_m(x)=S(x)-S_m(x)=\frac{(m+1)^2x}{1+(m+1)^3x^2}$$

由极值方法可求得，当 $x_m=\frac{\pm1}{(m+1)^{3/2}}$时，有极值

$$r_m(x_m)=\pm\frac{\sqrt{m+1}}{2}\xrightarrow{m\to\infty}\pm\infty,$$

所以级数在 $x=0$ 的邻域内不一致收敛.

(2) $S_m(x)=\sum\limits_{n=1}^{m}\left\{nxe^{-nx^2}-(n-1)xe^{-(n-1)x^2}\right\}=mxe^{-mx^2}$,

当 $x\neq0$ 时，$x^2>0$，有$\lim\limits_{m\to\infty}S_m(x)=0$，即

$$S(x)=\lim_{m\to\infty}S_m(x)=0.$$

当 $x=0$ 时，$S(0)=0$，所以和函数 $S(x)=0$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续. 由于余项

$$r_m(x)=S(x)-S_m(x)=-mxe^{-mx^2}$$

由极值方法可求得，当 $x_m=\pm\frac{1}{\sqrt{m}}$时，有极值

$$r_m(x)=\mp m\frac{1}{\sqrt{m}}e^{-1}=\mp\frac{\sqrt{m}}{e}\to\mp\infty,$$

所以级数在 $x=0$ 的邻域内不一致收敛.

例 2 证明函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)$在[0,1]上一致收敛，并讨论其和函数在[0,1]上的连续性、可积性与可导性.

证 对每一 n，$u_n(x)$是[0,1]上单调增加函数，故

$$u_n(x)\leqslant u_n(1)=\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2),\ n=1,2,\cdots.$$

又当 $t>1$ 时，有 $\ln(1+t^2)<t$，故

$$u_n(x)\leqslant\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2)<\frac{1}{n^3}\cdot n=\frac{1}{n^2},\ n=1,2,\cdots,$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，依 M 判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

由于每一 $u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，故由连续性与可积性定理知，级数的和函数在 $[0,1]$ 上连续且可积. 又

$$u_n'(x)=\frac{2x}{n(1+n^2x^2)}<\frac{2x}{n\cdot 2nx}=\frac{1}{n^2},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，依 M 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在 $[0,1]$ 上也一致收敛. 故依可导性定理知，$S(x)$ 在 $[0,1]$ 可导.

例 3 证明：级数 $\sum\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ 在 $(1,+\infty)$ 内连续.

证 对此类问题，可以先考虑开区间的一个内闭区间 $[c,d]$，再扩展到整个开区间.

令 $a_n(x)=\frac{1}{x^{n-1}}, b_n(x)=\frac{\ln(1+nx)}{nx}$. 在 $[a,+\infty)\ (a>1)$ 上有 $\frac{1}{x^{n-1}}\leqslant\frac{1}{a^{n-1}}$，而 $\sum\frac{1}{a^{n-1}}$ 收敛，从而由 M 判别法知，$\sum\frac{1}{x^{n-1}}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛. 又由于

$$0\leqslant\frac{\ln(1+nx)}{nx}\leqslant\frac{nx}{nx}=1,$$

令 $y(t)=\frac{\ln(1+t)}{t}$，则

$$y'(t)=\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)}<\frac{t-(1-t)}{t^2(1+t)}<0\ (t\geqslant 2).$$

所以 $\{b_n(x)\}$ 单调减少且一致有界 $(n\geqslant 2)$. 由阿贝尔判别法知，

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ 在$[a,+\infty)$上一致收敛. 而 $\dfrac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ 在$[a,+\infty)$上连续，依连续性定理知，级数$\sum\dfrac{\ln(1+nx)}{nx^n}$的和函数$S(x)$在$[a,+\infty)$上连续. 由$a$的任意性可以得出：$S(x)$在$(1,+\infty)$内连续.

例 4 设$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2$，求$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

解 因为$x\to 1$，故讨论$x=1$的邻域，不妨设$x\in(0,2)$. $\forall\, n\in\mathbf{N}$，$\forall\, x\in(0,2)$，有

$$\left|\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2\right|\leqslant\frac{|x|^n}{3^n}\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

当$n=0$时，上式也成立. 而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$收敛，依M判别法知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2$在$(0,2)$内一致收敛. 而级数每一项在$(0,2)$内都连续，故依连续性定理知，$f(x)$在$(0,2)$内连续，所以

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to 1}\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n=\frac{3}{4}.$$

例 5 证明：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{n^2x}{1+n^3x^2}-\dfrac{(n+1)^2x}{1+(n+1)^3x^2}\right\}$可以逐项积分；

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left\{nx\mathrm{e}^{-nx^2}-(n-1)x\mathrm{e}^{-(n-1)x^2}\right\}$不可以逐项积分.

证 (1) 由例1知，$S(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$，则

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+b^2}{1+a^2}.$$

$$\int_a^b S_m(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\frac{x}{1+x^2}-\frac{(m+1)^2x}{1+(m+1)x^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1+b^2}{1+a^2}-\frac{1}{2(m+1)}\ln\frac{1+(m+1)^3b^2}{1+(m+1)^3a^2}$$

$$\xrightarrow{m\to\infty}\frac{1}{2}\ln\frac{1+b^2}{1+a^2},$$

即 $$\lim_{m\to\infty}\int_a^b S_m(x)\mathrm{d}x=\int_a^b[\lim_{m\to\infty}S_m(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x.$$

由例 1 知,级数不一致收敛,但可积性成立.

(2) 由例 1 知,$S(x)=0$,故$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=0$,且

$$\int_a^b S_m(x)\mathrm{d}x=\int_a^b mx\mathrm{e}^{-mx^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-ma^2}-\mathrm{e}^{-mb^2}).$$

当 $a=0,b\neq 0$ 时,$\int_a^b S_m(x)\mathrm{d}x\not\to 0$,即

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b S_m(x)\mathrm{d}x\neq\int_a^b[\lim_{m\to\infty}S_m(x)]\mathrm{d}x.$$

本例再次说明,级数一致收敛是逐项可积的充分条件而不是必要条件.

例 6 证明:黎曼函数(当 $p>1$ 时为 p 级数)

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

在$(1,\infty)$内连续且无限次可导.

证 级数当 $x>1$ 时收敛,再来证级数一致收敛. 为此,只需证级数中各项导数组成的级数一致收敛.

因为$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}\right)'=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$,所以当 n 足够大时,有

$$0<\frac{\ln n}{n^x}\leqslant\frac{\ln n}{n^a}=\frac{1}{n^{(a+1)/2}}\cdot\frac{\ln n}{n^{(a-1)/2}}<\frac{1}{n^{(a+1)/2}}.$$

由于 $a>1$,即$\frac{a+1}{2}>1$,于是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{(a+1)/2}}$收敛,依 M 判别法知,$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}\right)'$一致收敛. 即和函数$\zeta(x)$连续且逐项可导,且由 a 的任意性知,在$(1,\infty)$ 内有

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}.$$

以上讨论可以无限地进行下去，因而对任意正整数k，连续的函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^x}$收敛且一致收敛，即各阶导数组成的级数一致收敛. 故$\zeta(x)$无限次可导，且有

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^x}.$$

例 7 设贝塞尔(Bessel)函数

$$B_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(m+n)!n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n} \quad (x \neq 0),$$

证明：(1) $[x^m B_m(x)]' = x^m B_{m-1}(x)$；

(2) $[x^{-m} B_m(x)]' = -x^m B_{m+1}(x)$；

(3) $B'_m(x) = \frac{1}{2}[B_{m-1}(x) - B_{m+1}(x)]$；

(4) $\frac{m}{x} B_m(x) = \frac{1}{2}[B_{m-1}(x) + B_{m+1}(x)]$.

证 因为数项级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(m+n)!n!}$绝对收敛，所以对任何$N$，级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(m+n)!n!} \left(\frac{N}{2}\right)^{m+2n}$也绝对收敛. 依 M 判别法知，贝塞尔函数$B_m(x)$一致收敛，其各阶导数也一致收敛，故在$(-\infty, +\infty)$内可以逐项积分或逐项可导.

(1) $$[x^m B_m(x)]' = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(m+n)!n!} \cdot \frac{x^{2m+2n}}{2^{m+2n}}\right]'$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2(m+n)}{(m+n)!n!2^{m+2n}} x^{2m+2n-1}$$

$$= x^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(m+n-1)!n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n-1} = x^m B_{m-1}(x).$$

(2) $$[x^{-m} B_m(x)]' = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(m+n)!n!} \cdot \frac{x^{2n}}{2^{m+2n}}\right]'$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{(m+n)!n!}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2^{m+2n}}$$

$$=x^{-m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(m+n+1-1)(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{(m+1)+2(n-1)}$$

$$=-x^{-m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(m+n+1)!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+1+2n}=-x^{-m}B_{m+1}(x).$$

(3) 将题(1)、题(2)结果组合,得

$$\begin{cases} mx^{m-1}B_m(x)+x^mB_m{}'(x)=x^mB_{m-1}(x), & ① \\ -mx^{-m-1}B_m(x)+x^{-m}B_m{}'(x)=-x^{-m}B_{m+1}(x), & ② \end{cases}$$

式①、式②分别乘以 $x^{-(m-1)}$和 x^{m+1},得

$$\begin{cases} mB_m(x)+xB_m{}'(x)=xB_{m-1}(x), & ③ \\ -mB_m(x)+xB_m{}'(x)=-xB_{m+1}(x). & ④ \end{cases}$$

将式③、式④相加,得 $B'_m(x)=\frac{1}{2}[B_{m-1}(x)-B_{m+1}(x)]$.

(4) 将式③、式④相减,得

$$\frac{m}{x}B_m(x)=\frac{1}{2}[B_{m-1}(x)+B_{m+1}(x)].$$

例 8 证明:逐项可积性的条件可以为$\sum u_n(x)$一致收敛,$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$可积.

证 对$[a,b]$作分割 T,设 I_i 为 T 的第 i 个小区间,$\omega_i=\sup\limits_{x',x''\in I_i}|S(x')-S(x'')|$ 是 $S(x)$ 在$[a,b]$上的振幅. 由于$\sum u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于 $S(x)$,所以$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N\in\mathbf{N}$,使得

$$|S_N(x')-S(x')|<\varepsilon/[3(b-a)],$$
$$|S_N(x'')-S(x'')|<\varepsilon/[3(b-a)].$$

又由 $S_N(x)=\sum\limits_{k=1}^{N}u_k(x)$ 在$[a,b]$上可积,故$\exists\ \delta>0$,当 $\|T\|<\delta$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(S_n)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{3}.$$

其中 $\omega_i(S_n)$是 $S_n(x)$在 I_i 上的振幅. 于是,$\forall\ x',x''\in I_i$,有

$$\begin{aligned}|S(x')-S(x'')|&\leqslant|S(x')-S_N(x')|+|S_N(x')-S_N(x'')|\\&\quad+|S_N(x'')-S(x'')|\\&<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}+\omega_i(S_n)+\frac{\varepsilon}{3(b-a)}\\&=\frac{2\varepsilon}{3(b-a)}+\omega_i(S_n).\end{aligned}$$

从而
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i&\leqslant\frac{2\varepsilon}{3(b-a)}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\omega_i(S_N)\Delta x_i\\&<\frac{2}{3}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\end{aligned}$$

即 $S(x)$ 在$[a,b]$上可积.

例 9 设$\{x_n\}\subset(0,1)$,且$\{x_n\}$中元素两两互不相等,讨论 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$ 在$(0,1)$内的连续性.

解 设 $f_n(x)=\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$,则$|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{2^n}$. 由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛,依 M 判别法知,$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在$(0,1)$内一致收敛.

当 $x\neq x_i(i=1,2,\cdots)$ 时,$f(x)$ 在$(0,1)-\{x_n\}$上连续,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 一致收敛,故 $f(x)$ 在$(0,1)-\{x_n\}$上连续. 当 $x=x_i$ 时,有

$$f(x)=f_k(x)+\sum_{n=1,n\neq k}^{\infty}f_n(x).$$

由于 $f_k(x)$ 在点 x_k 不连续,而 $\sum\limits_{n=1,n\neq k}^{\infty}f_n(x)$ 在点 x_k 连续(当 $n\neq k$ 时 $f_n(x)$ 连续,$\sum\limits_{n=1,n\neq k}^{\infty}f_n(x)$ 一致收敛),故点 $f(x)$ 在点 x_k 不连续. 由 x_k 的任意性知,$f(x)$ 在$\{x_n\}$的每一点不连续.

所以,$f(x)$ 在$(0,1)-\{x_n\}$上连续,在点集$\{x_n\}$上不连续.

例 10 设$f(x)=\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}+\cdots$.

(1) 证明 $f(x)$在$[\pi/6,\pi/2]$上连续； (2) 计算 $\int_{\pi/6}^{\pi/2}f(x)\mathrm{d}x$.

解 (1)因为$\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$在$[\pi/6,\pi/2]$上连续,且

$$0<\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\leqslant\frac{1}{2^n}\tan\left(\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2^n}.$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛,依M判别法知,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$在$[\pi/6,\pi/2]$上一致收敛. 故 $f(x)$ 在$[\pi/6,\pi/2]$上连续.

(2) 由 $f(x)$ 在 $[\pi/6,\pi/2]$上一致收敛，且$\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$ 在$[\pi/6,\pi/2]$上连续,故

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\mathrm{d}x=-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\cos\frac{x}{2^n}\right]\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[\cos\frac{\pi}{2^n\cdot 6}\Big/\cos\frac{\pi}{2^n\cdot 2}\right].$$

而 $S_n=\ln\left[\left(\cos\frac{\pi}{2\cdot 6}\cos\frac{\pi}{2^2\cdot 6}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n\cdot 6}\right)\right.$

$$\left.\Big/\left(\cos\frac{\pi}{2\cdot 2}\cos\frac{\pi}{2^2\cdot 2}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n\cdot 2}\right)\right]$$

$$=\ln\left[\left(2^n\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{2^n\cdot 2}\right)\Big/\left(2^n\sin\frac{\pi}{2^n\cdot 6}\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\ln\left\{\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2^n\cdot 2}\right)\Big/\frac{\pi}{2^n\cdot 2}\right]\left[\frac{\pi}{2^n\cdot 6}\Big/\sin\left(\frac{\pi}{2^n\cdot 6}\right)\right]\cdot\frac{6}{2}\right\}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty}\ln\frac{3}{2},$$

所以 $$\int_{\pi/6}^{\pi/2}f(x)=\ln\frac{3}{2}.$$

例 11 证明:若函数 $f(x)$在 **R** 上有任意阶导函数,且函数列$\{f^{(n)}(x)\}$在 **R** 上一致收敛于 $\varphi(x)$,则 $\varphi(x)=Ce^x$ (C 为任意常

数).

证 因为$\forall x\in\mathbf{R}$,有 $\varphi(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f^{(n)}(x)$.

又$\{f^{(n)}(x)\}$满足定理条件,$\forall x\in\mathbf{R}$,有

$$\varphi'(x)=\lim_{n\to\infty}f^{(n+1)}(x)=\varphi(x),$$

即$\forall x\in\mathbf{R}$,$\varphi'(x)=\varphi(x)$. 设 $F(x)=\varphi(x)\mathrm{e}^{-x}$,$\forall x\in\mathbf{R}$,有

$$F'(x)=\varphi'(x)\mathrm{e}^{-x}-\varphi(x)\mathrm{e}^{-x}=[\varphi'(x)-\varphi(x)]\mathrm{e}^{-x}=0,$$

从而,$\forall x\in\mathbf{R}$,$F(x)=C$ (C 为常数). 故

$$\varphi(x)\mathrm{e}^{-x}=C \quad 或 \quad \varphi(x)=C\mathrm{e}^{-x}.$$

例 12 验证:

(1) $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}[\cos(m!\pi x)]^{2n}=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\0, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q};\end{cases}$

(2) $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin^2(m!\pi x)\cos^{2n}(m!\pi x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\0, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}.\end{cases}$

证 (1) 当 $x\in\mathbf{Q}$ 时,设 $x=p/q$,其中 $q\in\mathbf{N}$,$p\in\mathbf{Z}$,当 $m\geqslant q$ 时,$m!p/q=k$ 是整数,有

$$\cos^{2n}(m!x\pi)=(\cos k\pi)^{2n}=1,$$

于是
$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}[\cos(m!x\pi)^{2n}]=1.$$

当 $x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ 时,$m!x$总是无理数,有

$$|\cos(m!\pi x)|<1,$$

所以
$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}[\cos(m!x\pi)]^{2n}=0.$$

(2) 当 $x\in\mathbf{Q}$ 时,设 $x=p/q$,其中 $q<\mathbf{N}$,$p\in\mathbf{Z}$. 当 $m\geqslant q$ 时,$m!p/q=k$是整数,$\forall n\in\mathbf{N}$,有

$$\sin^2(m!\pi x)\cos^{2n}(m!\pi x)=\sin^2 k\pi\cos^{2n}k\pi=0,$$

于是
$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sin^2(m!\pi x)\cos^{2n}(m!\pi x)=0.$$

当 $x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ 时,$m!\pi x$总是无理数,有

$$|\cos(m!\pi x)|<1,$$

从而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos^{2n}(m!\pi x)$收敛,且

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos^{2n}(m!\pi x)=\frac{1}{1-\cos^{2}(m!\pi x)}=\frac{1}{\sin^{2}(m!\pi x)}.$$

则
$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sin^{2}(m!\pi x)\cos^{2n}(m!\pi x)$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sin^{2}(m!\pi x)\sum_{n=0}^{\infty}\cos^{2n}(m!\pi x)=1.$$

第三节　幂　级　数

主 要 内 容

1. 由幂函数列 $\{a_n(x-x_0)^n\}$ 构成的函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+a_n(x-x_n)+\cdots$$

或
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

称为幂级数.

幂级数是函数项级数中的一类，以下所指幂级数均为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

2. 阿贝尔定理　若幂级数在 $x=x_0\neq 0$ 收敛，则对满足不等式 $|x|<|x_0|$ 的任何 x，幂级数收敛且绝对收敛；若幂级数在 $x=x_0$ 发散，则对满足不等式 $|x|>|x_0|$ 的任何 x，幂级数发散.

幂级数的收敛域是以原点为中心的区间，设其长度为 $2R$，则称 R 为幂级数的收敛半径，$(-R,R)$ 称为幂级数的收敛区间.

3. 幂级数收敛半径的求法

(1) 比式法：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho$；

(2) 根式法：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$；

(3) 柯西-哈达玛(Cauchy-Hadamard)法：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$.

当 $0<\rho<+\infty$ 时，幂级数收敛半径 $R=1/\rho$；

当 $\rho=0$ 时，幂级数收敛半径 $R=+\infty$；

当 $\rho=+\infty$ 时，幂级数收敛半径 $R=0$.

4. 若幂级数的收敛半径为 $R(R>0)$，则在其收敛区间 $(-R,R)$ 内任一闭区间 $[a,b]$ 上幂级数都一致收敛. 这种收敛称为内闭一致收敛.

5. 阿贝尔第二定理　若幂级数的收敛半径为 $R(R>0)$，且在 $x=R$（或 $x=-R$）时收敛，则幂级数在 $[0,R]$（或 $[-R,0]$）上一致收敛.

6. 幂级数的和函数是 $(-R,R)$ 内的连续函数，若幂级数在收敛区间的左(右)端点上收敛，则其和函数也在该端点右(左)连续.

7. 幂级数逐项求导或逐项求积后所得幂级数与原幂级数有相同的收敛区间.

8. 设 f 为幂级数在收敛区间 $(-R,R)$ 内的和函数，$x\in(-R,R)$，则

(1) f 在点 x 可导，且 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$；

(2) f 在 $[0,x]$ 上可积，且 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$.

幂级数在收敛区间 $(-R,R)$ 内的和函数 f 在 $(-R,R)$ 内具有任意阶导数，且可逐项求导任意次. 幂级数的系数与 f 在 $x=0$ 的各阶导数有如下关系：

$$a_0=f(0),\quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ n=1,2,\cdots,$$

即若幂级数在$(-R,R)$上有和函数 f,则幂级数由 f 在 $x=0$ 的导数惟一确定.

9. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 在 $x=0$ 的某邻域内相等,当且仅当 $a_n=b_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 时.

10. 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2,则有

(1) $\lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_nx^n,\ |x|<R_1$;

(2) $\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\beta\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)x^n,\ |x|<R$;

(3) $\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,\ |x|<R$,其中

$$R=\min\{R_1,R_2\},\quad c_n=\sum_{n=0}^{\infty}a_kb_{n-k}.$$

疑 难 解 析

1. 求幂级数的收敛域有哪些常用方法?

答 收敛域与收敛区间不完全一致.收敛域除包括收敛区间外,还可能包括收敛区间的一个或两个端点.因此,求幂级数的收敛域常用以下方法:

(1) 先用公式求出$\sum a_nx^n$ 的收敛半径,求得收敛区间,再讨论级数在收敛区间端点上的敛散性,最后求出幂级数的收敛域.

(2) 作变量代换 $y=\varphi(x)$,将级数化为幂级数$\sum a_ny^n$,讨论$\sum a_ny^n$ 的收敛域,从中求到原级数的收敛域.

(3) 将级数表示为几个级数的代数和,分别求各级数的收敛域,则它们的交集即为原级数的收敛域.

(4) 缺项级数可以用补项或一般函数项级数的方法处理.

2. 为什么阿贝尔定理是研究幂级数敛散性的一个基本定理?如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在 $x=0$ 收敛,那么,它在 $x=3$ 可能发散吗?

答 阿贝尔定理把确定一个幂级数的敛散性问题归结为确定幂级数在一个点的敛散性问题.定理指出:若幂级数在点 $x=x_0$ $(x_0\neq0)$ 收敛,则对一切适合 $|x|<|x_0|$ 的 x,幂级数绝对收敛;若幂级数在 $x=x_0$ 发散,则对一切适合 $|x|>|x_0|$ 的 x,幂级数发散.因此阿贝尔定理又称为幂级数的敛散性定理.

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在 $x=0$ 收敛,则依阿贝尔定理,幂级数至少在 $(0,4)$ 内绝对收敛.因此,不可能在 $x=3$ 发散.

3. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-4$ 条件收敛,其收敛半径应为多大?

答 由阿贝尔定理知,若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x_0\neq0$ 收敛,则对 $|x|<|x_0|$,$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛.显然,$-4\neq0$,所以,$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $|x|<|-4|=4$ 绝对收敛,故收敛半径 $R\geqslant4$.

方法、技巧与典型例题分析

本节例题包括三个方面:一是求幂级数的收敛半径与收敛域,这可以利用公式或疑难解析 1 中指出的方法求出;二是求幂级数的和函数,这主要用幂级数的性质来求;三是幂级数的运算,主要研究生成的幂级数的敛散性,这方面的难度较大,我们只能举几个例子说明.

一、幂级数的收敛半径与收敛域

例 1 求下列级数的收敛半径与收敛域：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}x^{n-1}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^p}\ (p>0)$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)x^n$； (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n$；

(5) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$； (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+\sqrt{n}}x^n$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)3^n}$； (8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x-2)^n$.

解 本例用公式直接求出收敛半径，再讨论区间端点，确定收敛域.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}=1$，故幂级数收敛半径 $R=1$.

当 $x=1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}$. 若令 $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$，则 $a_n=f(n)$，因为 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上连续，非负且单调减少，有

$$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{1+x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\ln^2(1+x)\Big|_1^{+\infty}=+\infty.$$

故 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x$ 发散. 由积分判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}$ 发散.

当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(1+n)}{n}$，依莱布尼茨判别法知，级数收敛.

因此，幂级数收敛域为 $[-1,1)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1$，故幂级数收敛半径为 1.

当 $x=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$. 因为 $\frac{1}{n^p}>\frac{1}{(n+1)^p}$，依莱布尼茨判别法知，级数收敛.

当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}(-1)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，当 $p>1$ 时，级数收敛，当 $0<p\leqslant 1$ 时，级数发散.

因此，当 $p>1$ 时，收敛域为 $[-1,1]$；当 $0<p\leqslant 1$ 时，收敛域为 $(-1,1]$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}}{(1+1/n)}=1$，故幂级数收敛半径为1.

当 $x=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$，依斯特林公式知

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sim\frac{1}{\sqrt{2n\pi}\mathrm{e}^{-n}\cdot n^n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n=\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}>\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{n}.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ 发散.

当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$. 因为 $\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sim\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\to 0$，且 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\mathrm{e}}{(1+1/n)^n}\to 1$，依莱布尼茨判别法知，级数收敛.

因此，幂级数收敛域为 $[-1,1)$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(2n+1)2^{n+1}}\Big/\frac{1}{(2n-1)2^n}\right|=\frac{1}{2}$，故幂级数收敛半径为 2 . $|x-2|<2$，即 $0<x<4$.

当 $x=0$ 时，级数一定收敛；

当 $x=4$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$，级数发散.

因此，幂级数收敛域为 $[0,4)$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=1$，故幂级数收

敛半径为 1.

$$S(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n,\ |x|<1,$$

$$S'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot 2x+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot nx^{n-1}+\cdots,$$

将上式两边同乘以$(1-x)$,得微分方程

$$(1-x)S'(x)=\frac{1}{2}S(x),\quad 且\quad S(0)=1,$$

分离变量,得 $$\frac{dS(x)}{S(x)}=\frac{dx}{2(1-x)},$$

两边积分,得 $$S(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}},\ |x|<1.$$

因此,幂级数收敛域为$(-1,1)$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1+\sqrt{n+1}}{n+\sqrt{n}}\right|=1$,故幂级数收敛半径为 1.

当 $x=-1$ 时,级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{1}{n+\sqrt{n}}$,显然发散;当 $x=1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+\sqrt{n}}$ 为收敛的交错级数.

因此,幂级数收敛域为$(-1,1]$.

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3)\cdot 3^n}{(n+2)\cdot 3^{n+1}}=\frac{1}{3}$,故幂级数的收敛半径为 3.

当 $x=3$ 时,级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}$,显然发散;当 $x=-3$ 时,级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$ 是收敛的交错级数.因此,幂级数收敛域为$[-3,3)$.

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{3^n+(-2)^n}=3$,故幂级数的收敛半径为 1/3.由 $|x-1|<1/3$,得 $2/3<x<4/3$.

当 $x=2/3$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+(2/3)^n}{n}$，其中 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 为收敛的交错级数. 依比值法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2/3)^n}{n}$ 收敛，故级数在 $x=2/3$ 收敛.

当 $x=4/3$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-2/3)^n}{n}$，其中 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2/3)^n}{n}$ 收敛，故级数在 $x=4/3$ 发散.

例 2 求下列级数的收敛半径与收敛域：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}n2^{2n}x^n(1-x)^n$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{3n}\right)\left(\frac{3+x}{3-2x}\right)^n$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$； (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx}$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n+2^n+\cdots+50^n}{n^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

解 本例先需要进行变量代换，再讨论收敛半径与收敛域.

(1) 令 $y=x(1-x)$，化级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}n2^{2n}y^n$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^{2(n+1)}}{n2^{2n}}=4,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}n2^{2n}y^n$ 收敛半径为 $1/4$.

由 $-\frac{1}{4}<x(1-x)<\frac{1}{4}$ 可解得 $0<\left(1-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{2}$，从而得 $\frac{1-\sqrt{2}}{2}<x<\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}<x<\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

当 $y=x(1-x)=\pm\frac{1}{4}$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}n2^{2n}\left(\pm\frac{1}{4}\right)^n$，显然发散. 因此，原级数收敛域为 $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

(2) 令 $y=\frac{3+x}{3-2x}$,化级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{3n}\right)y^n$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin[1/(3n+3)]}{\sin(1/3n)}=1,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{3n}\right)y^n$ 收敛半径为 1.

当 $-1<y<1$ 时,由 $-1<\frac{3+x}{3-2x}<1$ 解得 $x<0$ 或 $x>6$.

当 $x=0$ 时,原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{3n}$,由比较法的极限形式知 $\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{3n}\right)\Big/\frac{1}{3n}=1$,说明级数与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$ 同样发散.

当 $x=6$ 时,原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{3n}$,是收敛的交错级数.

因此,原幂级数收敛域是 $(-\infty,0)\cup[6,+\infty)$.

(3) 令 $y=\frac{x}{2x+1}$,化级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}y^n$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/(n\sqrt[n]{n})}=\lim_{n\to\infty}e^{-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\ln n}=1,$$

故级数收敛半径为 1.

当 $y=1$ 时,级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛,$\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 单调有界,故级数收敛.

当 $y=-1$ 时,级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$. 因为当 $n\to\infty$ 时,$\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\sim\frac{1}{n}$,故级数发散.

由 $-1<y\leqslant 1$ 得,$-1<\frac{x}{2x+1}\leqslant 1$,解得 $x>-\frac{1}{3}$ 和 $x\leqslant -1$. 因此,原幂级数收敛域为 $(-\infty,-1]\cup\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$.

(4) 令 $e^{-x}=y$，化级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(1+1/n)^{-n^2}y^n$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^{-n}=1/e,$$

故级数收敛半径为 e.

当 $y=e$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^n$，其通项 $b_n=\left[\frac{e}{(1+1/n)^n}\right]^n\xrightarrow{n\to\infty}0$，级数发散.

当 $y=-e$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}-e^n$，其通项 $b_n\not\to 0$，级数也发散.

由 $-e<y<e$ 得，$-e<e^{-x}<e\Rightarrow 0<e^{-x}<e\Rightarrow -1<x<+\infty$. 因此，原幂级数收敛域为 $(-1,+\infty)$.

(5) 由 $1\leqslant\sqrt{\left(\frac{1}{50}\right)^n+\left(\frac{2}{50}\right)^n+\cdots+\left(\frac{49}{50}\right)^n+1}\leqslant\sqrt[n]{50}\xrightarrow{n\to\infty}1$ 及 $\sqrt[n]{n}\xrightarrow{n\to\infty}1$，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1^n+2^n+\cdots+50^n}{n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{50}{(\sqrt[n]{n})^2}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{50}\right)^n+\left(\frac{2}{50}\right)^n+\cdots+\left(\frac{49}{50}\right)^n+1}=50,$$

而
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n+2^n+\cdots+50^n}{n^2}\left(\frac{1}{50}\right)^n$$

收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n+2^n+\cdots+50^n}{n^2}t^n$ 在 $\left[-\frac{1}{50},\frac{1}{50}\right]$ 上收敛.

由 $-\frac{1}{50}\leqslant\frac{1-x}{1+x}\leqslant\frac{1}{50}$ 解得 $\frac{49}{51}\leqslant x\leqslant\frac{51}{49}$，因此，幂级数收敛域为 $\left[-\frac{49}{51},\frac{51}{49}\right]$.

例 3 确定下列幂级数的收敛半径与收敛域:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+(-1)^n+\sin n\right)x^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{4^n}\right]x^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n^2}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n$, $a>0, b>0$.

解 本例级数均可分解为两个级数之和.

(1)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+(-1)^n+\sin n\right)x^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n+\sin n]x^n.$$

对 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n$, 有 $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=1$, 故级数收敛半径为 1. 又 $\sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^n\frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n$ 的收敛域为 $[-1,1]$.

对 $\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n+\sin n]x^n$, 因为 $|[(-1)^n+\sin n]x^n|\leqslant 2|x|^n$. 而 $\sum_{n=1}^{\infty}2|x|^n=2\sum_{n=1}^{\infty}|x|^n$ 的收敛域显然为 $(-1,1)$.

因此, 原级数收敛域是 $(-1,1)$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{4^n}\right]x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}x^n$.

对 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$, 有 $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=1$, 故级数收敛半径为 1. 又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(-1)^n$ 发散, 故级数收敛域为 $[-1,1)$.

对 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}x^n$, 有 $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{1}{4}$. 又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}(\pm 4)^n$ 发散, 故级数收敛域为 $(-4,4)$.

因此, 原级数收敛域为 $[-1,1)$.

(3) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n/n^2+b^n/n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max(a,b),$$

故级数收敛半径为 $\max\{1/a,1/b\}$.

当 $x=\pm 1/a\ (a\geqslant b)$ 或 $x=\pm 1/b\ (b\geqslant a)$ 时,级数都收敛.

例 4 确定下列级数的收敛半径与收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$;　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^{n^2}x^{n^3}$;　　(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{n^2}$.

解 本例都是缺项级数,但解法却不完全相同.

(1) 用达朗贝尔比值法.因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}\right)\bigg/\left(\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}\right)=\frac{1}{2}|x|^2,$$

所以,当 $|x|<\sqrt{2}$ 时幂级数绝对收敛,故 $R=1$.

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时,级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)$,是发散的.

因此,原幂级数收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(2) 用达朗贝尔比值法.因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n(n+1)}|x|^2\longrightarrow 0,$$

所以 $R=+\infty$,原幂级数收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

(3) 对级数添加一些值为零的项,不影响级数的敛散性.令

$$a_k=\begin{cases}n^{n^2}, & k=n^3,\\ 0, & k\neq n^3\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots),$$

则级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{n^2}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_kx^k$,由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$$

且当 $x=\pm 1$ 时,原级数的通项 $(\pm 1)^{n^3}n^{n^2}\xrightarrow[]{n\to\infty}\!\!\!\!\!\!\!/\ \ 0$,因此,原幂级数

收敛域为$(-1,1)$.

(4) 由柯西根值法的极限形式，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n^{n^2}|/2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{2}$$

$$=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ 1/2, & |x|=1,\\ +\infty, & |x|>1.\end{cases}$$

因此，原幂级数收敛域为$[-1,1]$.

例 5 确定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n|x|^n}$的收敛域.

解 当$x=0$时，原级数没有意义.

当$x>0$时，$\frac{x}{|x|}=1$，原级数化为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，级数发散.

当$x<0$时，$\frac{x}{|x|}=-1$，原级数化为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$，级数收敛.

因此，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n|x|^n}$的收敛域为$(-\infty,0)$.

注意 这个级数不是幂级数，所以不存在收敛半径.

二、幂级数的性质

幂级数的性质是指幂级数的和函数在收敛区间上的连续性、可微性与可积性. 利用幂级数的性质可以研究与幂级数和函数有关的函数性质、求幂级数的和函数以及讨论和函数的一致收敛性等. 在研究问题时，只有善于观察具体问题的不同点，灵活运用幂级数的性质，方能取得好的结果.

例 6 设$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$(-R,R)$上收敛，证明：

(1) $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S^n(0)}{n!}x^n$；(2) $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

证 (1) 由于幂级数在收敛区域内可微分任意次，有

$$S(0)=a_0,\ S'(0)=a_1,\ \cdots,S^{(n)}(0)=n!a_n,$$

故 $a_n=\dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$，即得 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

(2) 将 $S^{(k)}(x)$ 作为级数时，有 $S^{(k)}(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{S^{(n+k)}(0)}{n!}x^n$.

又

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S^{(n)}(0)}{n!}(x_0+x-x_0)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S^{(n)}(0)}{n!}\{C_n^0x_0^n+C_n^1x_0^{n-1}(x-x_0)\\&\quad+\cdots+C_n^n(x-x_0)^n\}.\end{aligned}$$

由于级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 在 $(-R,R)$ 内收敛，所以

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}|S^{(n)}(0)|\{C_n^0|x_0|^n+C_n^1|x_0|^{n-1}|x-x_0|\\&+\cdots+C_n^n|x-x_0|^n\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}|S^{(n)}(0)|\ (|x_0|+|x-x_0|)^n.\end{aligned}$$

当 $|x_0|+|x-x_0|<R$ 时收敛，即 $S(x)$ 绝对收敛，故可改变项的次序，得

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S^{(n)}(0)}{n!}\{C_n^0x_0^n+C_n^1x_0^{n-1}(x-x_0)\\&\quad+\cdots+C_n^n(x-x_0)^n\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(x-x_0)^n\left\{C_n^n\frac{S^n(0)}{n!}+C_{n+1}^n\frac{S^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x_0\right.\\&\quad\left.+C_{n+2}^n\frac{S^{(n+2)}(0)}{(n+2)!}x_0^2+\cdots\right\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(x-x_0)^n\left\{\frac{S^{(n)}(0)}{n!}+\frac{C_{n+1}^1S^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x_0\right.\\&\quad\left.+\frac{C_{n+2}^2S^{(n+2)}(0)}{(n+2)!}x_0^2+\cdots\right\}\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \left\{ S^{(n)}(0) + \frac{S^{(n+1)}(0)}{1!} x_0 + \frac{S^{(n+2)}(0)}{2!} x_0^2 + \cdots \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n (|x_0| + |x-x_0| < R).$$

例 7 设 $|x|<1$，证明：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^3}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)n(n+1)}{6}x^{n-2} = \frac{1}{(1-x)^4}$.

证 利用等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$ 和逐项求导公式求解.

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \left[\int \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \mathrm{d}x\right]'$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1} = \left\{\int\left[\int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x\right\}''.$$

$$= \left\{\int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{2}x^n\mathrm{d}x\right\}'' = \left\{\frac{x^2}{2(1-x)}\right\}'' = \frac{1}{(1-x)^3}.$$

(3) $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)n(n+1)}{6}x^{n-2}$$

$$= \left\{\int\left[\int\left(\int\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)n(n+1)}{6}x^{n-2}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x\right\}'''$$

$$= \left\{\int\left[\int\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n+1)}{6}x^{n-1}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x\right\}'''$$

$$= \left\{\int\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{6}x^n\mathrm{d}x\right\}''' = \left\{\frac{x^3}{6(1-x)}\right\}'''$$

$$=\left[\frac{3x^2-2x^3}{6(1-x)}\right]''=\left[\frac{6x-6x^2+2x^3}{6(1-x)^3}\right]'=\frac{1}{(1-x)^4}.$$

例 8 证明:贝塞尔函数 $B_0(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$ $(x\neq 0)$ 满足微分方程

$$xB_0''(x)+B_0'(x)+xB_0(x)=0.$$

证 由上节例 7 知,贝塞尔函数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛,故可逐项求导.

$$B_0'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n-1},$$

$$B_0''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n(2n-1)}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n-2},$$

$$xB_0''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n(2n-1)}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n-1},$$

$$xB_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(n!)^2 2^{2n}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{[(n-1)!]^2 2^{2n-2}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n)^2}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n-1}.$$

故 $xB_0''(x)+B_0'(x)+xB_0(x)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n(n-1)}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n-1}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{-(2n)^2}{(n!)2^{2n}}x^{2n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(n!)^2 2^{2n}}[2n(2n-1)+2n-(2n)^2]=0.$$

例 9 证明:当$|x|<1$时,有

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\arctan x.$

证 两级数在 $|x|<1$ 中一致收敛,故可逐项求积.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$

$$=\int_0^x \mathrm{d}t+\int_0^x t^2\mathrm{d}t+\int_0^x t^4\mathrm{d}t+\cdots+\int_0^x t^{2n-2}\mathrm{d}t+\cdots$$

$$=\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t\ (\text{利用等比级数和的公式})$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t+\int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ |x|<1.$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$$

$$=\int_0^x \mathrm{d}t-\int_0^x t^2\mathrm{d}t+\int_0^x t^4\mathrm{d}t+\cdots+(-1)^{n+1}\int_0^x t^{2n-2}\mathrm{d}t+\cdots$$

$$=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\operatorname{arctant},\ |x|\leqslant 1.$$

若在题(1)中,令 x 取特殊值,有

令 $x=\frac{1}{3}$,得 $\ln 2=2\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\cdots\right)$;

令 $x=\frac{1}{2}$,得 $\ln 3=2\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\cdots\right)$;

令 $x=\frac{2}{3}$,得 $\ln 5=2\left(\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2^3}{3\cdot 3^3}+\frac{2^5}{5\cdot 3^5}+\cdots\right)$;

令 $x=\frac{n-1}{n+1}$,得 $\ln n=2\left[\left(\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^5+\cdots\right]$.

若在题(2)中,令 $x=\sqrt{3}/3$,有

$$\pi=2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+\cdots\right).$$

令 $x=\pm 1$,则得莱布尼茨级数

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right).$$

例 10 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n3^{n-1}x^{n-1}$.

(1) 证明 $f(x)$ 在 $(-1/3,1/3)$ 内连续;

(2) 计算 $\int_0^{1/8}f(x)\mathrm{d}x$.

解
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n3^{n-1}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n(3x)^{n-1}$$
$$=\left[\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}n(3x)^{n-1}\mathrm{d}x\right]'=\left[\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(3x)^n\right]'$$
$$=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{3x}{(1-3x)}\right]'=\frac{1}{(1-3x)^2},\ |x|<1.$$

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}n3^{n-1}x^{n-1}$ 在 $(-1/3,1/3)$ 内一致收敛,故和函数 $f(x)$ 在 $(-1/3,1/3)$ 内连续.

(2) 和函数在收敛区间内逐项可导,故
$$\int_0^{1/8}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{(1-3x)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1-3x)}\Bigg|_0^{1/8}$$
$$=8/15-1/3=1/5.$$

例 11 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}\ (-\infty<x<+\infty)$,不求和函数,将积分 $\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ 用 $f(x)$ 表示出来.

解 利用幂级数在收敛区间内可逐项积分且收敛半径不变的性质,对 $tf(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{n!}$ 积分.
$$\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x\frac{t^{2n+1}}{n!}\mathrm{d}t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2n+2}x^{2n+2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)!}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}-1\right)=\frac{1}{2}[f(x)-1].$$

例 12 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $|x|<R$ 时收敛，且 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 也收敛，证明：

$$\int_0^R f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1},$$

且
$$\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

证 幂级数在收敛区间内可以逐项积分，即

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

而 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 收敛，则由阿贝尔第二定理，令 $x\to R-0$，有

$$\int_0^R f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}.$$

当 $|x|<1$ 时，有 $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$. 而 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛，故

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln 2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}.$$

例 13 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\ln(1+n)}$，证明：

(1) $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续；

(2) $f(x)$ 在 $x=-1$ 可导，在 $x=1$ 不可导，$\lim\limits_{x\to 1-0}f'(x)=+\infty$.

证 (1) 当 $|x|\leqslant 1$ 时，有不等式

$$\left|\frac{x^n}{n^2\ln(1+n)}\right|\leqslant\frac{1}{n^2\ln(1+n)}\leqslant\frac{1}{n^2\ln 2}$$

成立. 所以 $f(x)$ 的幂级数在 $[-1,1]$ 上一致收敛，从而 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续.

(2) 由逐项可导性质知，$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\ln(1+n)}\ (-1,1)$.

当 $x>0$ 时，$f'(x)$ 是正的单调增加函数，故 $\lim\limits_{x\to 1-0} f'(x)=A$ 存在. 设 $A<+\infty$，则 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界，又 $\dfrac{1}{n\ln(1+n)}>0$ $(n=1,2,\cdots)$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(1+n)}$ 必收敛. 但事实上，由积分判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 发散，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(1+n)}$ 发散. 于是 $A=+\infty$，即

$$\lim_{x\to 1-0} f'(x)=+\infty.$$

当 $x=-1$ 时，依莱布尼茨判别法知

$$f'(-1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln(1+n)}$$

收敛. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n\ln(1+n)}$ 在 $[-1,0]$ 上一致收敛. 由可微性知

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\ln(1+n)}\ (-1\leqslant x\leqslant 0),$$

即 $f(x)$ 在 $x=-1$ 可导.

由 $\lim\limits_{x\to 1-0} f'(x)=+\infty$，利用洛必达法则，有

$$f'(1)=\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0} f'(x)=+\infty,$$

即 $f(x)$ 在 $x=1$ 不可导.

求幂级数的和函数的方法往往不是惟一的，读者在解题过程中可以用不同方法得出同一结果. 为了节省篇幅，在以后的大部分例题中我们仍然采取一题一法的方式.

例 14 求下列幂级数的和函数：

(1) $1+\dfrac{x}{2!}+\dfrac{x^2}{3!}+\cdots+\dfrac{x^{n-1}}{n!}+\cdots$；

(2) $\dfrac{1}{1\cdot 2}x^2+\dfrac{1}{3\cdot 4}x^4+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)2n}x^{2n}+\cdots$；

(3) $x-4x^2+9x^3-16x^4+\cdots$；

(4) $3x^2-\dfrac{5}{2}x^4+\dfrac{7}{3}x^6+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n}x^{2n}+\cdots$.

解 (1) 设 $S(x)=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\cdots$,则

$$xS(x)=x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x-1,$$

所以 $$S(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{x},\ x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=x^2$,所以收敛半径 $R=1$.

当 $x=\pm 1$ 时,级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)^2}$,而

$$\frac{1}{2n(2n-1)}<\frac{1}{(2n-1)^2}<\frac{1}{4(n-1)^2},$$

因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4(n-1)^2}$ 收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)^2}$ 收敛.因此,级数收敛域为$[-1,1]$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$,则 $S(0)=0$;

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1},\quad S'(0)=0;$$

$$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}=\frac{1}{1-x^2},\ |x|<1.$$

故 $$S'(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

$$\begin{aligned}S(x)&=\frac{1}{2}\int_0^x\ln\frac{1+t}{1-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[\int_0^x\ln(1+t)\mathrm{d}t-\int_0^x\ln(1-t)\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{2}x[\ln(1+x)-\ln(1-x)]\\&\quad-\frac{1}{2}\left[\int_0^x\frac{t}{1+t}\mathrm{d}t+\int_0^x\frac{t}{1-t}\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{2t}{1-t^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\ln(1-x^2),\ |x|<1.\end{aligned}$$

(3) 设 $S(x)=x-4x^2+9x^3-16x^4+\cdots$，则

$$\int_0^x \frac{S(t)}{t}dt=\int_0^x(1-4t+9t^2-16t^3+\cdots)dt$$

$$=x-2x^2+3x^3-4x^4+\cdots=v(x),$$

而
$$\int_0^x \frac{v(t)}{t}dt=\int_0^x(1-2t+3t^2-4t^3+\cdots)dt$$

$$=x-x^2+x^3-x^4+\cdots=x\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$$

$$=\frac{x}{1+x},\ |x|<1,$$

故
$$S(x)=xv'(x)=x\left[x\left(\frac{x}{1+x}\right)'\right]'=\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}.$$

当 $x=\pm 1$ 时，级数发散.

(4) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{n+1}\Big/\dfrac{2n+1}{n}=1$，而 $x=\pm 1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n}$，是发散的，因此级数收敛域为 $(-1,1)$. 设

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n}x^{2n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{2n}$$

$$=2\frac{x^2}{1+x^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{2n},$$

$$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{2n}=\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{2n}\right]'dx$$

$$=\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2x^{2n-1}\right]dx$$

$$=\int_0^x\frac{2x}{1+x^2}dx=\ln(1+x^2),\ |x|<1,$$

故 $$S(x)=\frac{2x}{1+x^2}+\ln(1+x^2)$$
$$=2-\frac{2}{1+x^2}+\ln(1+x^2),\ |x|<1.$$

例 15 求下列幂级数在收敛域中的和函数：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$； (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^{2n-1}}{1+x^{2n}}$，$|x|<1$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$； (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$.

解 (1) 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=1$,所以收敛半径为 1.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$$
$$=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)'\mathrm{d}t$$
$$=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}\int_0^x\frac{t}{1-t}\mathrm{d}t=\frac{x}{1-x}+\frac{1}{x}[x+\ln(1-x)]$$
$$=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x).$$

(2) $S_{n+1}(x)$
$$=\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1+x^2}+\cdots+\frac{2^n x^{2n-1}}{1+x^{2n}}$$
$$=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1+x^2}+\cdots+\frac{2^n x^{2n-1}}{1+x^{2n}}$$
$$=\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2x}{1+x^2}+\cdots+\frac{2^n x^{2n-1}}{1+x^{2n}}$$
$$=\frac{1}{1-x}-\frac{2^2x^{4-1}}{1-x^4}+\frac{2^2x^{4-1}}{1+x^4}+\cdots+\frac{2^n x^{2n-1}}{1+x^{2n}}=\cdots$$
$$=\frac{1}{1-x}-\frac{2^{n+1}x^{2n}}{1+x^{2n+1}},$$

故 $$S(x)=\lim_{x\to\infty}S_{n+1}(x)=\frac{1}{1-x}.$$

(3) $\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} t^{2n-2} \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{2n-1}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^{2n-1} = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2} \right)^n$$

$$= \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1 - x^2/2} = \frac{x}{2 - x^2},\ |x| < \sqrt{2},$$

故 $S(x) = \left(\frac{x}{2 - x^2} \right)' = \frac{2 + x^2}{(2 - x^2)^2},\ x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$

(4) $\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)t^n \right] \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n+1}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+2} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

$$= x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n'} \right) = x^2 \left(\frac{1}{1-x} \right)'$$

$$= \frac{x^2}{(1-x)^2},\ |x| < 1,$$

故 $S(x) = \left[\frac{x^2}{(1-x)^2} \right]' = \frac{2x}{(1-x^3)},\ x \in (-1, 1).$

例 16 求下列幂级数在收敛域中的和函数:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-1)^n}{n(n+1)}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \left(\frac{3+x}{3-2x} \right)^{2n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 x^n$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n-1)3^{n-1}}$.

解 (1) 令 $x^2 - 1 = y$,级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n(n+1)}$,则

$$S(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n(n+1)}, \quad yS(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n(n+1)},$$

有 $[yS(y)]' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n},$

$$[yS(y)]'' = \sum_{n=1}^{\infty} y^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y},\ |y| < 1,$$

故 $$[yS(y)]' = \int_0^y \frac{1}{1-t}dt = -\ln(1-y).$$

$$yS(y) = \int_0^y -\ln(1-y)dy = (1-y)\ln(1-y) + y,$$

即 $$S(y) = 1 + \frac{1-y}{y}\ln(1-y),\ |y| < 1.$$

由 $|y|<1$ 知，$|x^2-1|<1 \Rightarrow |x|<1$，从而

$$S(x) = 1 + \frac{2-x^2}{x^2-1}\ln(2-x^2),\ |x| < 1.$$

(2) 令 $y=\dfrac{3+x}{3-2x}$，级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}y^{2n}$，由 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}(y)}{u_n(y)}=y^2$ 知，当 $|y|<1$ 时级数收敛，当 $y=\pm1$ 时级数发散. 故 $\left|\dfrac{3+x}{3-2x}\right|<1 \Rightarrow$ $x<0$ 或 $x>6$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}y^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^y\left(\frac{1}{2n}t^{2n}\right)'dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^y t^{2n-1}dt$$

$$= \int_0^y t\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}\right)dt = \int_0^y \frac{tdy}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\ln|1-y^2|,$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\left(\frac{3+x}{3-2x}\right)^{2n} = -\frac{1}{2}\ln\left|1-\left(\frac{3+x}{3-2x}\right)^2\right|$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{-3x(6-x)}{(3-2x)^2}\right|,$$

$$x \in (-\infty, 0) \cup (6, +\infty).$$

(3) $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^2 x^n = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^2 x^{n-1},$$

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^2 t^{n-1}\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n x^n = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1},$$

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n t^{n-1}\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x},\ |x| < 1,$$

故 $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1} = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = \frac{-1}{(1+x)^2},\ |x| < 1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^2 x^{n-1}=\left[\frac{-x}{(1+x)^2}\right]'=\frac{x-1}{(1+x)^3},\ |x|<1.$$

从而 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^2 x^n=\dfrac{x(x-1)}{(1+x)^3},\ x\in(-1,1).$

$$(4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n-1)3^{2n-1}}$$

$$=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{x}{3}\right)^{2n-1}$$

$$=x\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{t}{3}\right)^{2n-1}\right]'\mathrm{d}t$$

$$=x\int_0^x\left[\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{t}{3}\right)^{2(n-1)}\right]\mathrm{d}t$$

$$=x\int_0^x\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{1+(t/3)^2}=x\arctan\frac{x}{3},\ x\in[-3,3].$$

例 17 设 $0<x<1$,求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{1-x^{2n+1}}$ 的和函数.

解
$$\frac{x^{2n}}{1-x^{2n+1}}=\frac{x^{2n}+1}{1-x^{2n+1}}-\frac{1}{1-x^{2n+1}}$$

$$=\frac{1}{1-x^{2n}}-\frac{1}{1-x^{2n+1}}.$$

所以
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{1-x^{2k+1}}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{1-x^{2k}}-\frac{1}{1-x^{2k-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{2n+1}}.$$

故当 $0<x<1$ 时,有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{1-x^{2k+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{2n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x}.$$

例 18　设幂级数为$\sum_{n=1}^{n}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$,求：

(1) 收敛区间与和函数；(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}2^{n}$ 的值.

解　(1)因为$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)n!}{(n+1)!\ (2n+1)}|x|^2=0$,所以收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}$$

$$=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=x(\mathrm{e}^{x^2}-1),$$

故
$$S(x)=\left[x(\mathrm{e}^{x^2}-1)\right]'=(2x^2+1)\mathrm{e}^{x^2}-1,$$
$$x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) 当 $x=\sqrt{2}$ 时,级数化为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}2^{n}$,故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}2^{n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}2^{n}=(5\mathrm{e}^2-1)+1=5\mathrm{e}^2.$$

例 19　用多种方法求$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的值.

解法 1　设 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}x^n$, $|x|<1$,则

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{x^n}{n-1}-\frac{x^n}{n+1}\right)=\frac{1}{2}[S_1(x)-S_2(x)],$$

$$S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}=x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=x\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=x\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t}\mathrm{d}t=-x\ln|1-x|,\ |x|<1.$$

$$S_2(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$=\frac{1}{x}\left[-\ln|1-x|-x-\frac{x^2}{2}\right],\ x\neq 0,$$

从而 $S(x) = \frac{1}{2}[-x\ln|1-x|]$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}[-\ln|1-x|-x-\frac{x^2}{2}]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{x}{4}+\frac{1-x^2}{2x}\ln|1-x^2|, x\in(-1,0)\cup(0,1),$$

故令 $x=1/2$，即得

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2.$$

解法 2　设原式 $=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，则

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)x^{n+1},\ |x|<1,$$

于是 $S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n-1}=x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}=x^2\int_0^x\left(\sum_{n=2}^{\infty}t^{n-2}\right)\mathrm{d}t$

$$=x^2\int_0^x\frac{1}{1-t}=\mathrm{d}t=x^2\ln|1-x|, |x|<1;$$

$$S_2(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\int_0^x\left[\sum_{n=2}^{\infty}t^n\right]\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{t^2}{1-t}\mathrm{d}t$$

$$=-\ln|1-x|-x-x^2/2,\ |x|<1.$$

故 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=S_1\left(\frac{1}{2}\right)-S_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2.$

解法 3　设 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}, |x|<1, S(0)=0$，则

$$xS(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n-1)},$$

$$[xS(x)]'=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1},\quad \frac{1}{x}[xS(x)]'=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}\ (x\neq 0),$$

而　$\left\{\frac{1}{x}[xS(x)]\right\}'=\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-2}=\frac{1}{1-x}$ （$|x|<1$ 且 $x\neq 0$），

故　$\frac{1}{x}[xS(x)]'=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{0+\varepsilon}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{1-t}=-\ln|1-x|,$

$$[xS(x)]' = -x\ln|1-x|.$$

又 $$xS(x) = -\int_0^x t\ln(1-t)\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{x^2}{2}\ln(1-x) + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(1-x),$$

$$S(x) = -\frac{x}{2}\ln(1-x) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2x}\ln(1-x)$$

$$(|x| < 1 \text{ 且 } x \neq 0),$$

从而 $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n} = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} - \frac{3}{4}\ln 2.$$

解法 4 令 $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n-1)2^n}$, $|x| < 2$,

则 $$S' = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)2^n} = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)2^n} = xS_1(x),$$

$$S_1(x) = \int_0^x\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{n-2}}{2^n}\right)\mathrm{d}t = \int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{2(2-t)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(2-x),\ |x| < 2.$$

因为 $S(0)=0$,故

$$S(x) = \int_0^x\left[\frac{t}{2}\ln 2 - \frac{t}{2}\ln(2-t)\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{x^2}{4}\ln 2 - \frac{x^2}{4}\ln(2-x) + \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + \ln(2-x) - \ln 2,$$

从而 $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n} = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} - \frac{3}{4}\ln 2.$$

解法 5 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, $|x| < 1$,所以

$$原式 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right]$$

$$=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2.$$

解法 6 因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$，$|x|<1$，所以

$$\text{原式}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$$

$$=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2.$$

解法 5 与解法 6 直接从 $\ln(1-x)$的展开式入手，将所给级数变形后解出结果，避免了幂级数求和的过程，因而是以上解法中较简单的.

例 20 利用幂级数求下列数项级数之和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4(n+1)(n+2)2^n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{n-1}}$；　　(4) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n2^n}$.

解 一般先设$S(x)$，确定收敛区间；再求出$S(x)$，确定x_0，求得$S(x_0)$，即数项级数之和.

(1) 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}\Big/\left(\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}\right)=\frac{1}{2}x^2,$$

所以当$|x|<\sqrt{2}$时级数收敛，当$x=\pm\sqrt{2}$时级数发散.

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}t^{2n-2}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}$$

$$=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2/2}{1-x^2/2}=\frac{x}{2-x^2},$$

于是 $$S(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},$$

从而 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=S(1)=3.$$

(2) 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1},\quad S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},\ |x|<1,$$

所以 $$S'(x)=\int_0^x\frac{t}{1-t}\mathrm{d}t=-x-\ln(1-x),$$

$$\begin{aligned}S(x)&=-\int_0^x[t+\ln(1-t)]\mathrm{d}t,\\&=-[x^2/2+x\ln(1-x)-x-\ln(1-x)]\\&=x+\ln(1-x)-x^2/2-x\ln(1-x),\end{aligned}$$

从而 $$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4(n+1)(n+2)2^n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(3) 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big/\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right|=1,$$

幂级数在(−1,1)内收敛.

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2(n-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2},$$

所以 $$S(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

$$\begin{aligned}S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{n-1}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}},\end{aligned}$$

从而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}2^{n-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$.

(4) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)n2^n}=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}$,设

$$S(x)=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2}x^n,$$

而
$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n-2}x^{n+1}&=x^3\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n-2}x^{n-2}=x^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\\&=x^3\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^n\right)\mathrm{d}t=x^3\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t\\&=-x^3\ln(1-x),\ |x|<1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n+1}=x\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}x^n&=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n-x-\frac{1}{2}x^2\right)\\&=x\left[-\ln(1-x)-x-\frac{1}{2}x^2\right].\end{aligned}$$

令 $x=1/2$,有

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)n2^n}&=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x\\&=\frac{1}{8}\ln2-\frac{1}{2}\ln2+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}-\frac{3}{8}\ln2.\end{aligned}$$

例 21 利用幂级数求下列数项级数之和.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2-n+1)\frac{1}{2^n}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n+1}}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{2^{n-1}}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)}{n!}2^n$;

(5) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$;　　(6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

解 (1) 设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2-n+1)x^n$,则

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,$$

$$S_1(x)=x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^{n-2},\quad S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,$$

而 $$\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(n-1)t^{n-2}\right]\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1},$$

$$\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n t^{n-1}\right]\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x},$$

故 $$S_1(x)=x^2\left(\frac{1}{1+x}\right)''=\frac{2x^2}{(1+x)^3},\quad S_2(x)=\frac{1}{1+x}.$$

于是 $$S(x)=\frac{2x^2}{(1+x)^3}+\frac{1}{1+x}.$$

令 $x=1/2$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2-n+1)\frac{1}{2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{22}{27}.$$

(2) 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n+1}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$，而

$$\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)t^{n-1}\right]\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n,$$

$$\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)t^n\right]\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{x^2}{1-x},$$

所以 $$S(x)=x^2\left[\frac{x^2}{1-x}\right]''=\frac{2x^2}{(1-x)^3},$$

于是 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=4.$$

(3) 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$，则

$$\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^2t^{n-1}\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1},$$

$$\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},\quad |x|<1.$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\quad |x|<1,$$

$$S(x)=\left[x\frac{1}{(1-x)^2}\right]'=\frac{1+x}{(1-x)^3},\ |x|<1.$$

从而 $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{2^{n-1}}=S\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{27}.$$

（4）设 $$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n+1}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(x-1)!}$$

$$=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=x^2e^x.$$

则 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)}{n!}2^n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)}{n!}2^{n+1}.$$

设 $$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)}{n!}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1}$$

$$=S(x)-x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=x^2e^x-x(e^x-1),$$

则 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)}{n!}2^n=\frac{1}{2}S_1(2)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot e^2-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(e^2-1)=e^2+1.$$

（5）设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{2n+1}x^{2n+1}$，则

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 2^n\cdot x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x^2)^n$$

$$=\frac{1}{1+2x^2},\ |x|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以 $$S(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+2t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}x,\ |x|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$$

于是 $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{2n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$$

$$=\sqrt{2}S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

(6) 设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$，则

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!^2}{(2n)!}x^{2n},$$

$$\begin{aligned}\left(2-\frac{x^2}{2}\right)S'(x)&=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^{2n+2}\\&=2+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^{2n+2}\\&=2+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{2[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}x^{2n+2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^{2n+2}\right\}\\&=2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\left[\frac{2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}-\frac{1}{2}\right]x^{2n+2}\\&=2+\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}=2+\frac{x}{2}S(x),\end{aligned}$$

得微分方程　　$S'(x)-\frac{4}{4-x^2}S(x)=\frac{4}{4-x^2}$，

解得　　$S(x)=\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\left(\arcsin\frac{x}{2}+c\right)$.

当 $S(0)=0$ 时，求得 $c=0$，从而

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}=S(1)=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

例 22　设 $a_1=a_2=1, a_{n+1}=a_n+a_{n-1}, n=2,3,\cdots$. 证明：在 $|x|<1/2$ 时，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$ 收敛，并求出和函数.

证　由题设知 $a_n>0$，且当 $n\geqslant 2$ 时，$a_{n+1}>a_n$. 故当 $|x|<1/2$ 时，有

$$\frac{|a_{n+1}x^n|}{|a_nx^{n-1}|}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}|x|<\frac{2a_n}{a_n}|x|=2|x|<2\cdot 1/2=1.$$

从而幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$收敛.

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}=1+x+\sum_{n=3}^{\infty}a_nx^{n-1}\\&=1+x+\sum_{n=3}^{\infty}(a_{n-1}+a_{n-2})x^{n-1}\\&=1+x+x\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-1}x^{n-2}+x^2\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-2}x^{n-3}\\&=1+x\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^{n-1}\right)+x^2\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}\\&=1+xS(x)+x^2S(x),\end{aligned}$$

解得

$$S(x)=\frac{1}{1-x-x^2}.$$

三、其它类型例题

例 23 设$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ $(0\leqslant x\leqslant1)$,证明:当$0<x<1$时,有

$$f(x)+f(1-x)+\ln x[\ln(1-x)]=\pi^2/6.$$

证 因为$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/n^2}=1$,所以幂级数收敛半径为1.而$f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}1/n^2=\pi^2/6$.利用逐项微分性质,有

$$\begin{aligned}&[f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)]'\\&=f'(x)-f'(1-x)+\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln x}{x-1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}\\&\quad+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^{n-1}}{n}\\&=0,\end{aligned}$$

即　$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)\equiv c,\ x\in(0,1).$

令 $x\to 0^+$，得 $c=f(1)=\pi^2/6$，故

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\pi^2/6.$$

例 24　证明：$\forall\ x,y\in\mathbf{R}$，有

(1) $S(x+y)=S(x)C(y)+C(x)S(y)$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{S(x)}{x}=1.$

证　$\forall\ x,y\in\mathbf{R}$，已知

$$S(x)=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots,\quad C(y)=\frac{1}{0!}-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\cdots,$$

故
$$S(x)C(y)=x-\left(\frac{x^3}{3!0!}+\frac{xy^2}{2!1!}\right)+\left(\frac{x^5}{5!0!}+\frac{x^3y^2}{3!2!}+\frac{xy^4}{1!4!}\right)-\cdots,$$

$$C(x)S(y)=y-\left(\frac{y^3}{0!3!}+\frac{yx^2}{1!2!}\right)+\left(\frac{y^5}{0!5!}+\frac{y^3x^2}{2!3!}+\frac{yx^4}{4!1!}\right)-\cdots,$$

$$\begin{aligned}
&S(x)C(y)+C(x)S(y)\\
&=(x+y)-\left(\frac{x^3}{3!0!}+\frac{xy^2}{2!1!}+\frac{yx^2}{1!2!}+\frac{y^3}{0!3!}\right)\\
&\quad+\left(\frac{x^5}{5!0!}+\frac{x^4y}{4!1!}+\frac{x^3y^2}{3!2!}+\frac{x^2y^3}{2!3!}+\frac{xy^4}{1!4!}+\frac{y^5}{0!5!}\right)\\
&=(x+y)-\frac{1}{3!}(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)\\
&\quad+\frac{1}{5!}(x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5)+\cdots\\
&=(x+y)-\frac{1}{3!}(x+y)^3+\frac{1}{5!}(x+y)^5-\cdots\\
&=S(x+y).
\end{aligned}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{S(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$= \lim_{x \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lim_{x \to 0} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = 1.$$

例 25 设 $a_n \geqslant 0$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散，且 $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = 0$，证明：$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

证 因为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散，所以幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R \leqslant 1$，依柯西-哈达玛判别法，有 $\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$.

设 $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，因为

$$1 - \frac{A_{n-1}}{A_n} = \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \Rightarrow \frac{A_{n-1}}{A_n} \xrightarrow{n \to \infty} 1,$$

所以 $\sqrt[n]{A_n} \xrightarrow{n \to \infty} 1$.

由 $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = 0$ 知，当 n 充分大时，有

$$a_n < a_1 + a_2 + \cdots + a_n = A_n,$$

故

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{A_n} = 1 \quad 即 \quad \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

例 26 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{a_n} = 1$，$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$，证明：

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|S_n|} = 1.$$

证 本例是应用幂级数收敛半径来证明极限的例子.

由柯西收敛性定理，当 $|x| < 1$ 时，有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n,$$

$\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$ 收敛. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$ 收敛半径为 R，则 $R \geqslant 1$.

当 $|x| < R$ 时,有

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}S_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,$$

由题设知,$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径 $|x| \leqslant 1$,即 $R \leqslant 1$. 因此,必有 $R = 1$.

例 27 证明:若 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, $|x| < r$,且 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$ 收敛,则 $\int_0^r f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$.

证 因为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$ 收敛,所以在 $[0,r]$ 上一致收敛. 于是

$$\lim_{x\to r-0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\lim_{x\to r-0}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1},$$

$\forall\, x \in (0,r)$,有

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

从而 $$\int_0^r f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to r-0}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}.$$

下面我们来讨论由两个已知收敛半径的幂级数所得到的新幂级数的收敛区间问题.

设有两个幂级数

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,\quad |x| < r,$$
$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots,\quad |t| < r_2,$$

将后式代入前式,合并同次幂系数所得幂级数称为生成幂级数,即

$$y(x(t)) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\Big(\sum_{k=0}^{\infty}b_k t^k\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty}c_n t^n,$$

其中 $c_0 = a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + \cdots,$

$c_1 = a_1 b_1 + 2a_2 b_0 b_1 + 3a_3 b_0^2 b_1 + \cdots,$

$c_2 = a_1 b_2 + a_2(b_1^2 + 2b_0 b_2) + 3a_3(b_0 b_1^2 + b_0^2 b_1) + \cdots,$

……

例 28 设由两个幂级数

$$y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots,\ |x|<r_1,$$
$$x(t)=b_1+b_2t+b_3t^3+\cdots,\ |t|<r_2$$

的生成幂级数为

$$y(x(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0\Big(\sum_{k=1}^{\infty} b_k t^k\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^k,$$

其中 $c_0=a_0, c_1=a_1b_1, c_2=a_1b_2+a_2b_1^2, \cdots$. 证明:生成幂级数至少在 $(-r,r)$ 内收敛,其中

$$r = \frac{r_1(r_2-\delta)}{M+r_1}.$$

其中,$0<\delta<r_2$,M 对一切取定的 δ 满足:$\forall\ m\in\mathbf{N}$,有

$$\left|b_m(r_2-\delta)^m\right|\leqslant M.$$

证 考查级数

$$Y=|a_0|+|a_1|x+|a_2|x^2+\cdots,$$
$$X=|b_1|t+|b_2|t^2+|b_3|t^3+\cdots,$$

依阿贝尔定理,级数 X 与 Y 分别在 $(-r_1,r_1)$ 和 $(-r_2,r_2)$ 内收敛,而 $|b_m|<\dfrac{M}{(r_2-\delta)^m}$,故当 $|t|<r_2-\delta$ 时,有

$$|X|\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|b_n||t|^n \leqslant M\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|t|}{r_2-\delta}\right)^n$$
$$= M\left[\frac{1}{1-|t|/(r_2-\delta)}-1\right] = \frac{M|t|}{r_2-\delta-|t|}.$$

于是,当 $\dfrac{M|t|}{r_2-\delta-|t|}<r$ 时,$|t|<\dfrac{r_1(r_2-\delta)}{M+r_1}=r<r_2$,从而级数 X 收敛. 又 $|X|<r_1$,所以代入后 Y 也收敛. 说明对符合式子的 $t, x(t)$ 收敛,得 $y(x)$ 也收敛. 由于是绝对收敛,故生成幂级数(交换项次序后的级数)收敛于同一和,因此至少在区间 $(-r,r)$ 内收敛.

例 29 设有幂级数 $y(x)=1+b_1x+b_2x^2+\cdots,\ |x|<r$,证明:当 $|x|<r_1=\dfrac{r-\delta}{M+1}$ 时,幂级数 $\dfrac{1}{y(x)}$ 收敛. 其中 $0<\delta<r$,M 为使一

切 m 有 $|b_m(r-\delta)^m| \leqslant M$ 的数.

证 $1/y(x)$是商级数的特例. 设

$$h(x) = b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots,$$

显然,$h(x)$与 $y(x)$有相同的收敛域. 当$|h|<1$ 时,有

$$\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{1+h(x)} = 1 - h + h^2 - h^3 + \cdots,$$

其收敛半径为1. 当将$h(x)$代入$1/y(x)$时,$1/y(x)$是生成幂级数. 依上例,$r_1=\dfrac{1\cdot(r-\delta)}{M+1}=\dfrac{r-\delta}{M+1}$,故在$(-r_1,r)$内,幂级数 $1/y(x)$ 收敛.

第四节　函数展开成幂级数

主 要 内 容

1. 若函数 f 在点 x_0 的某邻域内存在直至 $n+1$ 阶的连续导数,则形如

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

的等式称为 f 在 x_0 的泰勒公式,而级数

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

称为 f 在 x_0 的泰勒级数.

2. 当 $x_0=0$ 时,形如

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

的级数称为 f 的麦克劳林(Maclaurin)级数.

3. 当 $x_0=0$ 时的积分型余项为

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t;$$

拉格朗日型余项为

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)x^{(n+1)},\ \xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间};$$

柯西型余项为

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\theta x)(1-\theta)^n x^{(n+1)},\ 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

4. 设 f 在点 x_0 具有任意阶导数,则函数 f 在区间 (x_0-r,x_0+r) 内等于其泰勒级数的和函数的充分条件是:对一切满足不等式 $|x-x_0|<r$ 的 x,有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

5. 常用的基本展开式有

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\ -\infty<x<+\infty.$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,$$
$$-\infty<x<+\infty.$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,$$
$$-\infty<x<+\infty.$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\quad -1<x<1.$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,\ -1<x\leqslant 1.$$

疑难解析

1. 将函数展开成幂级数的方法有哪些?

答 (1) 直接展开法 依据定义求出函数 f 的各阶导数,并研究其余项的敛散性,然后写出函数的泰勒(或麦克劳林)展开式.

但是,由于余项敛散性的确定比较困难,此法一般很少使用.

(2) 间接展开法 由某些已知的函数的幂级数展开式,利用四则运算、变量代换、逐项求积、逐项求导等方法求得所求函数的展开式.

一般常用$\frac{1}{1\pm x}$和五个基本展开式.其优点是比较简捷,收敛半径易于确定,不必讨论余项的敛散性.但在利用$\frac{1}{1\pm x}$来展开形如$\frac{1}{a\pm f(x)}$的函数展开式时,要认真讨论收敛区间.

(3) 待定系数法 将待求函数写成幂级数形式,利用两个幂级数相等时其同次幂系数相同的性质,通过比较确定待求幂级数的系数,从而求得函数展开式.

待定系数法常用于有关乘法和除法的公式的导出,过程比较繁琐.

方法、技巧与典型例题分析

怎样将一个函数展开成幂级数,我们已在疑难解析中作了回答,只要灵活运用合理的方法,不难求得函数的幂级数展开式.

例 1 几何级数

$$G(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

在 $|x|<1$ 时绝对收敛且一致收敛于和函数.证明:当 $|x|<$

$\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$时，有

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[G\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)-G\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)\right]$$
$$=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是斐波那契(Fibonacci)数列.

证 因为，当 $|x|<\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$ 时，有

$$\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right|<1,\quad \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right|<1,$$

所以，$G\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)$ 与 $G\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)$ 一致收敛且绝对收敛，从而

$$G\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)-G\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)$$
$$=\left[1\bigg/\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)-1\bigg/\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)\right]$$
$$=\left[1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2x^2+\cdots+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^nx^n+\cdots\right]$$
$$-\left[1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2x^2+\cdots+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^nx^n+\cdots\right]$$
$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x+\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]x^2+\cdots$$
$$+\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]x^n+\cdots,$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[G\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)-G\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)\right]$$
$$=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots.$$

因为 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$，所以 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 是斐波那契数列(证明见上册).

此结果还表明，当$|x|<\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$时，有

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[G\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)-G\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)\right]=\frac{x}{1-x-x^2}.$$

例 2 证明：积分正弦函数

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = x-\frac{x^3}{3!3}+\frac{x^5}{5!5}-\frac{x^7}{7!7}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

证 因为，在$(-\infty,+\infty)$内有

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,$$

而当$x\neq 0$时$\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\right)$，有

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots,$$

故上述幂级数在任一有限区间上一致收敛，得

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

例 3 求下列函数的麦克劳林级数：

(1) $\dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}$； (2)$\sin^3 x$；

(3) $x\mathrm{e}^{-x^2}$； (4) $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$.

解 本例中的函数均可直接或略加变化后利用基本展开式展开为幂级数.

(1) $\dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}$

$$=\frac{1-x}{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}$$

$$=\frac{1-x}{1-x^8}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{8n}-\sum_{n=0}^{\infty}x^{1+8n}$$

$$=1-x+x^8-x^9+\cdots+x^{8n}-x^{1+8n}+\cdots,\ |x|<1.$$

(2) $\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$

$$=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-3^{2n})}{(2n+1)!}x^{2n+1}\ (-\infty,+\infty).$$

(3) $xe^{-x^2}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!}\ (-\infty,+\infty).$

(4) $\frac{x}{1+x-2x^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+2x}\right)$

$$=\frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n\right]$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}[1-(-1)^n2^n]x^n,\ |x|<\frac{1}{2}.$$

例 4 求下列函数的幂级数展开式：

(1) $\arcsin x$； (2) $\arctan\frac{2x}{1-x^2}$；

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cos x-1}{x}\right)$； (4) $x\arctan x-\ln\sqrt{1-x^2}$.

解 本例可用逐项求积与逐项求导的方法求解.

(1) $\arcsin x=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=\int_0^x(1-t^2)^{-1/2}\mathrm{d}t$

$$=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1/2(-3/2)\cdots(-1/2-n+1)}{n!}(-1)^nt^n\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^x\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2^n}[1\cdot 3\cdots(2n-1)]t^{2n}\right\}\mathrm{d}t$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!(2n+1)}x^{2n+1},\ |x|<1.$$

(2) $\arctan\frac{2x}{1-x^2}=\int_0^x\left(\arctan\frac{2t}{1-t^2}\right)'\mathrm{d}t$

$$=\int_0^x \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = 2\int_0^x \Big[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\Big]\mathrm{d}t$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1},\ |x|<1.$$

(3) $\dfrac{\cos x-1}{x}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}\ (-\infty,+\infty).$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cos x-1}{x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n-1}{(2n)!}x^{2n-2}.$$

(4) $x\arctan x-\ln\sqrt{1-x^2}=\displaystyle\int_0^x\big[t\arctan t-\ln\sqrt{1-t^2}\big]'\mathrm{d}t$

$$=\int_0^x \arctan t\mathrm{d}t=\int_0^x\Big[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{2n-1}\Big]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^6}{5\cdot 6}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n-1)2n}+\cdots.$$

例 5 求下列函数的幂级数展开式：

(1) $\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$；　　(2) $\dfrac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

解 本例可用待定系数法求解.

(1) 设 $y=\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$. 因为

$$y'=\frac{1}{1+x^2}\left[1-x\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\right],$$

所以　$(1+x^2)y'=1-xy$

$$\Rightarrow(1+x^2)\sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^{n-1}=1-x\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,$$

即　$a_1+2a_2x+\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}[a_{n+2}(n+1)+a_{n-1}(n-1)]x^n$

$$=1-a_0x-\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^n.$$

比较系数，得

$a_0=1$，$2a_2=-a_0$，$3a_3+a_1=-a_1$，$4a_2+2a_2=-a_2,\cdots$.

由 $y(0)=0 \Rightarrow a_0=0$ 得

$$a_{2n}=0,\ a_1=1,\ a_3=-\frac{2}{3},\ a_5=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5},\cdots,$$

$$a_{2n+1}=(-1)^n\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},\cdots,$$

从而 $$y=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1},\ -1<x\leqslant 1.$$

(2) 设 $y=\dfrac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,则

$$\begin{aligned}x\sin\alpha&=(1-2x\cos\alpha+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\\&=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\\&\quad-(2a_0\cos\alpha)x-(2a_1\cos\alpha)x^2-(2a_2\cos\alpha)x^3+\cdots\\&\quad+a_0x^2+a_1x^3+\cdots.\end{aligned}$$

比较等式两边同次幂系数,得

$$a_0=0,\ a_1=\sin\alpha,\ a_2=\sin2\alpha,\cdots,\ a_n=\sin n\alpha,\cdots,$$

这里利用了三角恒等式

$$\sin(n+1)\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha-\sin(n-1)\alpha,\ n=2,3,\cdots.$$

所以 $$\begin{aligned}&\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\\&=x\sin\alpha+x^2\sin2\alpha+\cdots+x^n\sin n\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin n\alpha.\end{aligned}$$

例 6 求下列函数的幂级数展开式:

(1) $\ln^2(1-x)$; (2) $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; (3) $e^x\sin x$;

(4) $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$; (5) $\ln(1+x+x^2+x^3)$.

解 本例可利用幂级数的运算求解.

(1) 因为 $\ln(1-x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_n}{n},\ -1\leqslant x<1$,所以

$$\ln^2(1-x)=\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\right)^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1}\right]x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(n+1-k)}\right]x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{k+(n+1-k)}{k(n+1-k)}\right]x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+1-k}+\frac{1}{k}\right)\right]x^{n+1}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^{n+1}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1},\ -1\leqslant x<1.$$

(2) 因为 $\arcsin x = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n(2n+1)}x^{2n+1},|x|<1,$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-1/2}$$

$$=1+\frac{x^2}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\cdots,\ |x|<1,$$

所以 $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$=x+\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2}\right)x^3$$

$$+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)x^5+\cdots$$

$$=x+\frac{2}{1\cdot 3}x^3+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}x^5+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}x^7+\cdots$$

$$=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1},|x|<1.$$

(3) 因为 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{1}{n!}\sin\frac{n\pi}{2}$,故

$$e^x\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sin\frac{n\pi}{2}x^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\sin(n\pi/2)}{0!n!} + \frac{\sin[(n-1)\pi/2]}{1!(n-1)!}\right. \\
&\quad \left. + \cdots + \frac{\sin(\pi/2)}{(n-1)!1!}\right\}x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin[(n-k)\pi/2)]}{k!(n-k)!}\right\}x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{k!(n-k)!}\sin\frac{(n-k)\pi}{2}\right]\frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\sin\frac{(n-k)\pi}{2}\right]\frac{x^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

而由三角公式与棣莫弗公式，有

$$
\begin{aligned}
\left[1+\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^n &= \left(2\cos^2\frac{\pi}{4}+2\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\right)^n \\
&= 2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right),
\end{aligned}
$$

又由二项式公式与棣莫弗公式，有

$$
\begin{aligned}
&\left[1+\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^n \\
&= C_n^0\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)^n+\cdots+C_n^{n-2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)^2 \\
&\quad + C_n^{n-1}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)^2+C_n^n.
\end{aligned}
$$

比较两式的虚部，可得

$$
\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\sin\frac{(n-k)\pi}{2} = 2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}.
$$

从而 $\quad \mathrm{e}^x\sin x = \sum_{n=1}^{\infty}2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}\cdot\frac{x^n}{n!}\ (-\infty,+\infty).$

(4) 由于 $\mathrm{e}^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$ 是复数

$$
\mathrm{e}^{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} = \mathrm{e}^{x(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)} = \mathrm{e}^{x\cos\alpha+\mathrm{i}x\sin\alpha}
$$

的实部，故有

$$
\mathrm{e}^{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\mathrm{e}^{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(\cos n\alpha+\mathrm{i}\sin n\alpha).
$$

比较上式两边的实部，即知

$$e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n!}x^n\ (-\infty,+\infty).$$

同时可得

$$e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n!}x^n\ (-\infty,+\infty).$$

(5) $\ln(1+x+x^2+x^3)=\ln(1+x)+\ln(1+x^2)$，

因为
$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\ -1<x\leqslant 1,$$
$$\ln(1+x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n},\ -1\leqslant x\leqslant 1,$$

故 $\ln(1+x+x^2+x^3)$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^m}{m}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{[m/2]-1}[1+(-1)^m]\frac{x^m}{m}$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}+(-1)^{[m/2]-1}[1+(-1)^m]}{m}x^m.$$

例 7 求 $\sec x,\tan x$ 和 $\dfrac{x}{e^x-1}$ 的麦克劳林级数.

解 (1) $\sec x$ 是偶函数，幂级数只含偶次项，即

$$\sec x=E_0+\frac{E_1}{2!}x^2+\frac{E_2}{4!}x^4+\cdots+\frac{E_n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots.$$

由于 $\sec x\cos x=1$ 和 $\cos x$ 的展开式

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,$$

故
$$\left(E_0+\frac{E_1}{2!}x^2+\frac{E_2}{4!}x^4+\cdots\right)\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)=1.$$

由
$$E_0=1,\ \frac{E_1}{2!}-\frac{E_0}{2!}=0,\ \frac{E_0}{2!}-\frac{E_1}{2!\ 2!}+\frac{E_2}{4!}=0,\ \cdots,$$

解得

$E_0=1,\ E_1=1,\ E_2=5,\ E_3=61,\ E_4=1385,\ E_5=50521,\cdots.$

系数 E_j 称为欧拉系数.

(2) $\tan x$ 是奇函数,幂级数只含奇次项,即

$$\tan x = T_1 x + \frac{T_2}{3!}x^3 + \frac{T_3}{5!}x^5 + \cdots + \frac{T_n}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots.$$

由于 $\tan x = \sin x \sec x$,故

$$\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)\left(E_0 + \frac{E_1}{2!}x^2 + \frac{E_2}{4!}x^4 + \cdots\right)$$

$$= T_1 x + \frac{T_2}{3!}x^3 + \frac{T_3}{5!}x^5 + \cdots.$$

由 $T_1 = E_0,\ T_2 = 3!\left(\frac{E_1}{2!} - \frac{E_0}{3!}\right),\ T_3 = 5!\left(\frac{E_2}{4!} - \frac{E_1}{2!3!} + \frac{E_0}{5!}\right), \cdots,$

解得 $\qquad T_1=1,\ T_2=2,\ T_3=16, T_4=272, \cdots.$

系数 T_i 称为正切系数.

(3) 因为 $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{n!}$,则

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}.$$

设 $$\frac{x}{e^x - 1} = \beta_0 + \frac{\beta_1}{1!}x + \frac{\beta_2}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!}x^n,$$

则 $$\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots\right)\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{1!}x + \frac{\beta_2}{2!}x^2 + \cdots\right) = 1.$$

比较同次幂系数,得

$$\beta_0 = 1,\ \beta_1 = -\frac{1}{2},\ \beta_2 = \frac{1}{6},\ \beta_3 = 0,\ \beta_4 = -\frac{1}{30}, \cdots.$$

当 $n \geqslant 1$ 时,$\beta_{2n+1} = 0$.

$B_n = (-1)^{n+1}\beta_{2n}$称为伯努利(Bernoulli)数,有

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42},\ B_4 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{5}{66}, \cdots.$$

例 8 将下列函数在指定点展开为泰勒级数:

(1) $\frac{1}{x^2+4x+3},\ x_0=1$; $\qquad$ (2) $\ln \frac{1}{x^2+2x+2},\ x_0=-1$;

(3) $\ln\frac{x}{1+x}$, $x_0=1$;　　　(4) $\frac{1}{x}$, $x_0=2$.

解　展开 $f(x)$ 的幂级数时，首先要将 $f(x)$ 变形，使之出现 $(x-x_0)$ 的因式. 一般利用已知展开式展开，特别要注意对收敛区间的讨论.

(1) $$\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{(x+3)(x+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+(x-1)/2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+(x-1)/4}\right]$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{4}\right)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n,$$

由 $\left|\frac{x-1}{2}\right|<1$ 和 $\left|\frac{x-1}{4}\right|<1$ 得，收敛区间为 $(-1,3)$.

(2) $$\ln\frac{1}{x^2+2x+3}=-\ln[1+(x+1)^2]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x+1)^{2n},$$

由 $-1<(x+1)^2\leqslant 1$ 得，收敛区间为 $(-2,0]$.

(3) $$\ln\frac{x}{1+x}=\ln x-\ln(1+x)$$
$$=\ln[1+(x-1)]-\ln[2+(x-1)],$$

因为 $\ln[1+(x-1)]=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$, $0<x<2$,

$$\ln[2+(x-1)]=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n2^n},\ -1<x\leqslant 3.$$

故　$$\ln\frac{x}{1+x}=-\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)(x-1)^n.$$

由 $0<x\leqslant 2$ 和 $-1<x\leqslant 3$ 得，收敛区间为 $(0,2]$.

(4) $$\frac{1}{x}=\frac{1}{2+(x-2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+(x-2)/2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-2}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}.$$

由 $|x-2|<2$ 得，收敛区间为(0,4).

例 9 将下列函数在指定点展开为泰勒级数：

(1) $\cos x$，$x_0=\pi/4$；(2) $\cos(2x+\pi/4)$，$x_0=0$；

(3) $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$，$x_0=0$.

解 解法同上例.

(1)
$$\begin{aligned}\cos x &= \cos[\pi/4+(x-\pi/4)]\\ &= \cos(\pi/4)\cos(x-\pi/4)-\sin(\pi/4)\sin(x-\pi/4)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-\pi/4)^{2n}}{(2n)!}\right.\\ &\quad\left.-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-\pi/4)^{2n-1}}{(2n-1)!!}\right]\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n(n+1)/2}\frac{1}{n!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n \quad (-\infty,+\infty).\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\cos(2x+\pi/4) &= \cos(\pi/4)\cos 2x-\sin(\pi/4)\sin 2x\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!!}\right]\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n(n+1)/2}\frac{2^n x^n}{n!} \quad (-\infty,+\infty).\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x\\ &= \frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1-x)+\frac{1}{2}\arctan x-x\\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}-x\\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\frac{1}{2}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt-x\\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n+1}-x\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1} \quad (-1,1).\end{aligned}$$

例 10 将函数 $f(x)=\ln x$ 按分式$\dfrac{x-1}{x+1}$的正整数幂展开成幂级数.

解 当 $x\neq-1$ 时，$\ln x=\ln\left[\left(1+\dfrac{x-1}{x+1}\right)\Big/\left(1-\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]$. 因为

$$\ln\frac{1+u}{1-u}=2\left(u+\frac{1}{3}u^3+\frac{1}{5}u^5+\cdots\right),\ |u|<1,$$

所以 $$\ln x=2\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+\cdots\right]$$
$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}.$$

由$\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|<1$得，收敛区间为$(0,+\infty)$.

例 11 将函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$按分式$\dfrac{x}{1+x}$的正整数幂展开成幂级数.

解 $$f(x)=\frac{x}{1+x}\sqrt{1+x}=\frac{x}{1+x}\cdot 1/\sqrt{1-x/(1+x)}$$
$$=\frac{x}{1+x}\left(1-\frac{x}{1+x}\right)^{-1/2}\text{（用}(1+x)^{\alpha}\text{的展开式）}$$
$$=\frac{x}{1+x}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n\right]$$
$$=\frac{x}{1+x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1}.$$

由$\left|\dfrac{x}{1+x}\right|<1$知，$x>-1/2$，而 $x=-1/2$ 时，级数条件收敛，故级数的收敛区间为$[-1/2,+\infty)$.

幂级数常用来求极限，计算积分，证明不等式或等式，作近似计算等，以下通过例题来讨论幂级数的应用问题.

例 12 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}+\cdots+\dfrac{n}{a^n}\right)$，$a>1$.

解 设 $$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n,\ |x|<1.$$

$$S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'$$

$$=\frac{x}{(1-x)^2},\ |x|<1.$$

因为 $a>1$,所以 $1/a<1$,从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}=S\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{a}{(1-a)^2},\ a>1.$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{(1-a)^2}.$$

例 13 利用函数的幂级数展开求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n[\ln(n+1)-\ln n]$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}n\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

解 (1) 先求 $\ln\limits_{x\to\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$.

$$\lim_{x\to\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}x\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}-\cdots\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2}-\cdots\right)=1,$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}n[\ln(n+1)-\ln n]=1.$$

(2) $$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1}(\text{见例 }4(1)),$$

$$\sin^3 x=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-3^{2n})}{(2n+1)!}x^{2n+1}(\text{见例 }3(2)).$$

代入$\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$,即得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1}}{\dfrac{3}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(1-3^{2n})}{(2n+1)!}x^{2n+1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\left(\dfrac{1}{2\cdot 3}x^3+\cdots\right)}{\dfrac{3}{4}\left[\dfrac{-1\cdot(-8)}{3!}x^3+\cdots\right]}=-\frac{1}{6}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x}\right)^n\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[x-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}+\cdots\right]=\frac{1}{2}.$$

例 14 讨论 c 为何值时,以下不等式成立.

$$e^x+e^{-x}\leqslant 2e^{cx^2},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

解 因为由 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ 可得

$$e^x+e^{-x}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\leqslant 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}=2e^{x^2/2},$$

所以,当 $c\geqslant 1/2$ 时,有 $e^x+e^{-x}\leqslant 2e^{x^2/2}$.

反之,因为

$$0\leqslant\lim_{x\to 0}\frac{2e^{cx^2}-(e^x+e^{-x})}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(1+cx^2+\cdots)-2(1+x^2/2+\cdots)}{2x^2}=c-\frac{1}{2}.$$

故,当且仅当 $c\geqslant 1/2$ 时,$e^x+e^{-x}\leqslant 2e^{cx^2}$ 成立.

例 15 证明:对每一正整数 k,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^k}{n!}$ 是 e 的整数倍.

证 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^k}{n!}x^n$,则所求为 $f(1)$.

因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n!}x^n$在$(-\infty,+\infty)$内收敛，可逐项积分，故

$$f(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n!}x^{n-1}=xf_1(x),$$

$$\int_0^x f_1(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{k-1}}{n!}x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{k-1}}{n!}x^{n-1}=xf_2(x),$$

……

$$\int_0^x f_{k-1}(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n-1}=xf_k(x),$$

而
$$\int_0^x f_k(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x-1,$$

于是
$$f(x)=\underbrace{x(\cdots(x(x(\mathrm{e}^x-1)')')'\cdots)'}_{k\text{次}},$$

即$f(x)=P_k(x)\mathrm{e}^x$，$P_k(x)$是x的整系数多项式. 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n!}=f(1)=P_k(1)\cdot\mathrm{e}.$$

这里，$P_k(1)$是整数.

例 16 已知当$\alpha>1$时，$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(\alpha-x)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$，证明：$\int_{-1}^{1}\frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\pi$，$n=1,2,\cdots$.

证 将已知等式两边按$1/\alpha$的幂次展开，有

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(\alpha-x)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\alpha}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(1-x/\alpha)\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int_{-1}^{1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha^n}\int_{-1}^{1}\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{2n+1}}\int_{-1}^{1}\frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\quad(\text{奇函数积分为零}).$$

这里，$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$关于$x$在$(-1,1)$内闭一致收敛，故

$\forall\ [a,b]\subset(-1,1)$，级数在$[a,b]$上可逐项积分. 其中$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha^n}$收敛，$\left|\int_a^b\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\right|\leqslant\pi$(有界)，依阿贝尔判别法，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha^n}\int_a^b\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$关于$a,b\in[-1,1]$一致收敛. 取极限，即知等式合理.

$$\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}=\frac{\pi}{\alpha}\left(1-\frac{1}{\alpha^2}\right)^{-1/2}=\frac{\pi}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\cdot\frac{1}{\alpha^{2n}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\cdot\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}.$$

比较两式同次幂系数，即得

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi\quad(n=1,2,\cdots).$$

例 17 计算积分$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x$.

解
$$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}\ln x\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{x^2}{1-x^2}\ln x\mathrm{d}x$$

$$=-1+\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}\ln x\right)\mathrm{d}x.$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n}\ln x$虽然在$[0,1]$上不一致收敛，但在$[0,1]$上可逐项积分. 事实上，在$(0,1)$内，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n}\ln x$为等比级数，有

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{1-x^2}\ln x, & 0<x<1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$$

故$S(1-0)\neq S(0)$，级数不一致收敛. 而

$$R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}x^{2k}\ln x=\frac{x^2}{1-x^2}\ln x\cdot x^{2n},$$

$\dfrac{x^2\ln x}{1-x^2}$在$(0,1)$内有界，即$|R_n(x)|\leqslant Mx^{2n}$，从而

$$\left|\int_0^1 R_n(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1|R_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant M\int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}x=\frac{M}{2n+1}\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 R_n(x)\mathrm{d}x=0.$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x&=-1+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 x^{2n}\ln x\mathrm{d}x\\&=-1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\\&=-\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\right]+\frac{1}{2^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{24}=-\frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

例 18 计算积分$\displaystyle\int_0^1\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x$.

解 $\ln\dfrac{1}{1-x}=-\ln(1-x)=x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots,\ |x|<1,$

级数在$|x|\leqslant r\ (r<1)$上一致收敛，故可以逐项积分. 当$x<1$时，有

$$\int_0^1\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\cdots,$$

而当$x=1$时，有

$$\begin{aligned}&\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\cdots\\&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots=1.\end{aligned}$$

依阿贝尔定理，有

$$\lim_{x\to 1-0}\int_0^x \ln\frac{1}{1-x}dx = \lim_{x\to 1-0}\left[\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\cdots\right]=1,$$

即
$$\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x}dx = 1.$$

例 19 证明：$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx dx = \frac{\pi}{n!}$.

证 $e^{e^{ix}} = e^{\cos x + i\sin x} = e^{\cos x}[\cos(\sin x) + i\sin(\sin x)]$,

故 $\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx dx$

$$= \mathrm{Re}\int_0^{2\pi} e^{e^{ix}}\cos nx dx = \mathrm{Re}\int_0^{2\pi}\cos nx\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k!}\right)dx.$$

而级数$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k!}$在$[0,2\pi]$上一致收敛，于是

$$\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}\cos nx\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k!}dx = \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_0^{2\pi}e^{ikx}\cos nx dx$$

$$= \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_0^{2\pi}\cos nx(\cos kx + i\sin kx)dx.$$

由三角函数系的正交性，因为

$$\int_0^{2\pi}\cos nx\cos kx dx = \begin{cases}\pi & k = n,\\ 0, & k \neq n,\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos nx\sin kx dx = 0,$$

所以
$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx dx = \frac{\pi}{n!}.$$

第九章　傅里叶级数

第一节　傅里叶级数展开式

主 要 内 容

1. 若函数 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0,$$

则称函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上正交.

具有正交性的函数系称为正交函数系.

三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上正交，称为三角函数正交系.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\mathrm{d}x = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cos nx\mathrm{d}x = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\sin nx\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\sin nx\mathrm{d}x = 0.$$

而 $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\mathrm{d}x = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1^2\mathrm{d}x = 2\pi.$$

2. 由三角函数系所产生的形如

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

的级数称为三角级数.

若级数$\dfrac{|a_0|}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$收敛,则三角级数在整个数轴上绝对收敛且一致收敛.

3. 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期,在$[-\pi,\pi]$上可积,且在$[-\pi,\pi]$上对应一个三角级数,即

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\ n=1,2,\cdots,$$

其中 a_n,b_n 称为 $f(x)$ 的傅里叶系数,级数称为 $f(x)$ 的傅里叶级数.

4. 狄利克雷定理　若以 2π 为周期的函数 f 在$[-\pi,\pi]$上分段光滑,则在每一个点 $x\in[-\pi,\pi]$,f 的傅里叶级数收敛于 f 在点 x 的左、右极限的算术平均值,即

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

该定理也可写成:若函数 f 在$[-\pi,\pi]$上分段单调,且除有限个间断点外连续,则其傅里叶级数在区间$[-\pi,\pi]$上收敛,其和函数为

$$S(x)=\begin{cases}f(x), & x\text{ 是 }f\text{ 的连续点},\\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & x\text{ 是 }f\text{ 的间断点},\\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, & x=\pm\pi.\end{cases}$$

疑难解析

1. 怎样对函数进行傅里叶级数展开?

答　首先考虑函数的定义区间和是否满足收敛定理的条件.

(1) 如果 $f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$内以 2π 为周期的函数，且满足收敛定理条件，则可直接依定理写出傅里叶级数并确定和函数.

(2) 若函数 $f(x)$定义在区间$[-\pi,\pi]$或$[0,2\pi]$上，则应理解为 $f(x)$是定义在整个数轴上以 2π 为周期的函数. 即对$[-\pi,\pi]$以外部分按函数在$(-\pi,\pi]$上的对应关系作周期延拓(不必写出). 例如，$f(x)$为定义在$(-\pi,\pi]$上的函数，则经周期延拓后的函数是

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & -\pi<x\leqslant\pi, \\ f(x-2k\pi), & (2k-1)\pi<x\leqslant(2k+1)\pi. \end{cases}$$

这个过程在解题时不必写出，然后按收敛定理写出傅里叶级数并确定和函数.

(3) 若 $f(x)$是定义在$(-\pi,\pi]$上的奇函数(或偶函数)，则 $a_n=0$(或 $b_n=0$)，在连续点上

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\left(\text{或 } f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\right).$$

若 $f(x)$只定义在$(0,\pi]$上，则可先作奇延拓(或偶延拓)即延拓为$(-\pi,\pi]$上的奇函数(或延拓为$(-\pi,\pi]$上的偶函数)，然后再展开成傅里叶正弦级数(或余弦级数).

2. 傅里叶级数的实质是否在于积分区间?

答 傅里叶级数的实质不在于积分区间，而在于所选的函数系是三角函数正交系. 当改变积分区间时，只要选择不同的三角函数正交系就行. 在区间$[a,b]$上要得到 $f(x)$的傅里叶级数，就要取规范正交函数系，如

$$\frac{1}{\sqrt{2l}},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{2\pi x}{l},\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{2\pi x}{l},\ \cdots,$$

$$l=\frac{1}{2}(b-a).$$

此时，相应地有

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

其中 $$a_0=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x.$$

方法、技巧与典型例题分析

函数的傅里叶级数一般按疑难解析1中所述方法即可求出. 但在计算傅里叶系数时,要特别注意积分的技巧和对下标 n 的讨论,有时还要讨论傅里叶级和函数的连续性与级数在区间上的收敛或一致收敛性,讨论中可用到函数项级数的性质与判别法.

例 1 设 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$

(1) 求 $f(x)$ 的傅里叶级数;

(2) 级数是否收敛? 是否收敛于 $f(x)$?

(3) 级数在 $(-\pi,\pi)$ 内是否一致收敛?

解 (1) 由傅里叶系数公式,得

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}x=1,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n\pi}\sin n\pi\Big|_0^{\pi}=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{-1}{n\pi}\cos n\pi\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

$$=\begin{cases}0, & n=2m,\\ \dfrac{2}{(2m+1)\pi}, & n=2m+1,\end{cases}\quad m=0,1,2,\cdots,$$

所以 $$f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)\pi}\sin(2n+1)x.$$

(2) $f(x)$ 满足收敛定理条件,所以 $f(x)$ 的傅里叶级数在数轴上处处收敛. 在 $[-\pi,\pi]$ 上

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)\pi}\sin(2n+1)\pi$$
$$=\begin{cases}f(x), & x\in[-\pi,0]\cup(0,\pi],\\ 1/2, & x=0.\end{cases}$$

(3) 因为 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数在 $(-\pi,\pi)$ 内不连续，所以级数在 $(-\pi,\pi)$ 内不一致收敛.

例 2 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的可积函数，在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶级数为 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，证明：平移后的函数 $f(x+h)$ 的傅里叶级数为

$$f(x)\sim\frac{\tilde{a}_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{a}_n\cos nx+\tilde{b}_n\sin nx).$$

其中 $\tilde{a}_n=a_n\cos nh+b_n\sin nh,\quad n=0,1,2,\cdots,$

$\tilde{b}_n=b_n\cos nh-a_n\sin nh,\ n=1,2,\cdots.$

证
$$\tilde{a}_n=\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)\cos nx\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h}f(t)[\cos nt+\cos nh+\sin nt\sin nh]\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\cos nh\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\mathrm{d}t+\sin nh\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\mathrm{d}t\right]$$
$$=a_n\cos nh+b_n\sin nh,\ n=0,1,2,\cdots.$$

类似可得 $\tilde{b}_n=b_n\cos nh-a_n\sin nh,\ n=1,2,\cdots.$

例 3 设 $f(x)$，$g(x)$ 均为可积函数. 证明：若 $f(-x)=g(x)$，且 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则

$$g(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx-b_n\sin nx).$$

证 因为，对 $g(x)$，有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} g(x)\cos nx\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} g(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} g(-t)\cos nt\mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{0} g(t)\cos nt\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx = a_n,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} g(x)\sin nx\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} g(x)\sin nx\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{0} g(-t)\sin nt\mathrm{d}t + \int_{0}^{-\pi} g(-t)\sin nt\mathrm{d}t\right]$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = -b_n,$$

所以
$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx - b_n\sin nx).$$

类似可证:若 $f(-x)=-g(x)$,且

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

则
$$g(x) \sim \frac{-a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-a_n\cos nx + b_n\sin nx).$$

例 4 设函数 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上光滑,证明:

(1) 若 $f(-x)=f(x)$ 或 $f(\pi-x)=-f(x)$,则函数的傅里叶级数是 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\cos(2n-1)x$;

(2) 若 $f(-x)=-f(x)$ 或 $f(\pi-x)=f(x)$,则函数的傅里叶级数是 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}\sin(2n-1)x$.

证 (1) 若 $f(-x)=f(x)$ 或 $f(\pi-x)=-f(x)$,则 $f(x)$ 为偶函数,$b_n=0, n=1,2,\cdots$. 而

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x\right],$$

$$a_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x+\int_{\pi/2}^{\pi}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x\right].$$

设 $x=\pi-t$，则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，于是

$$\int_{\pi/2}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=-\int_{\pi/2}^{0}f(\pi-t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}f(\pi-x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x=-\int_{\pi/2}^{0}f(\pi-t)\cos 2nt\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{\pi/2}f(\pi-x)\cos 2nx\mathrm{d}x.$$

所以
$$a_0=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/2}f(\pi-x)\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}[f(x)+f(\pi-x)]\mathrm{d}x=0,$$

$$a_{2n}=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/2}f(\pi-x)\cos 2nx\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}[f(x)+f(\pi-x)]\cos 2nx\mathrm{d}x=0,$$

从而
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\cos(2n-1)x.$$

(2)请读者自己用类似方法证明.

例 5 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，证明：

(1) 若 $\forall\ x\in[-\pi,\pi]$，$f(x+\pi)=f(x)$，则 $a_{2k-1}=b_{2k-1}=0$；

(2) 若 $\forall\ x\in[-\pi,\pi]$，$f(x+\pi)=-f(\pi)$，则 $a_{2k}=b_{2k}=0$.

其中 a_i,b_i 都是函数 $f(x)$ 的傅里叶系数.

证 (1) 依傅里叶系数公式

$$a_{2k-1}=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(2k-1)x\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}f(x)\cos(2k-1)x\mathrm{d}x\right],$$

$$b_{2k-1}=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin(2k-1)x\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}f(x)\sin(2k-1)x\mathrm{d}x\right],$$

设 $x=\pi-t$，则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，于是

$$\int_0^\pi f(x)\cos(2k-1)x\mathrm{d}x = -\int_{-\pi}^0 f(t+\pi)\cos(2k-1)t\mathrm{d}t$$
$$= -\int_{-\pi}^0 f(x+\pi)\cos(2k-1)x\mathrm{d}x,$$
$$\int_0^\pi f(x)\sin(2k-1)x\mathrm{d}x = -\int_{-\pi}^0 f(t+\pi)\sin(2k-1)t\mathrm{d}t$$
$$= -\int_{-\pi}^0 f(x+\pi)\sin(2k-1)x\mathrm{d}x.$$

将后两式结果代人前两式中，即得

$$a_{2k-1} = 0, \quad b_{2k-1} = 0.$$

(2)用类似方法可证.

例 6 设 $f(x) = \begin{cases} x+2\pi & -\pi < x < 0, \\ \pi & x = 0, \\ x, & 0 < x \leqslant \pi, \end{cases}$

将 $f(x)$ 展开成以 2π 为周期的傅里叶级数.

解法 1 依常规方法计算傅里叶系数.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^0 (x+2\pi)\mathrm{d}x + \int_0^\pi x\mathrm{d}x\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{x^2}{2}+2\pi x\right)\Big|_{-\pi}^0 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi\right] = 2\pi.$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^0 (x+2\pi)\cos nx\mathrm{d}x + \int_0^\pi x\cos nx\pi\mathrm{d}x\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}(x+2\pi)\Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^0 \sin nx\mathrm{d}x\right.$$
$$\left. + \frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx\mathrm{d}x\right]$$
$$= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^\pi \sin nx\mathrm{d}x = 0,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(x+2\pi)\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{x+2\pi}{n}\cos nx\right)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,\mathrm{d}x\right.$$

$$\left. + \left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right]\right.$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2\pi}{n} + \frac{\pi}{n}(-1)^n - \frac{\pi}{n}(-1)^n\right] = -\frac{2}{n},$$

故
$$f(x) = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,\ -\pi < x \leqslant \pi.$$

解法 2 利用周期函数特性($f(t)$ 以 l 为周期,则$\int_{a}^{a+l}f(x)\mathrm{d}x$ 与 a 无关),令 $F(x)=x$,计算傅里叶系数.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}F(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}x\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}x^2\Big|_{0}^{2\pi} = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{n}\int_{0}^{2\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{0}^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_{0}^{2\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}\cos nx\Big|_{0}^{2\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}F(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{x}{n}\cos nx\right)\Big|_{0}^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_{0}^{2\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right] = -\frac{2}{n},$$

故
$$f(x) = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,\ -\pi < x \leqslant \pi.$$

解法 3 利用函数的奇偶性,记

$$\varphi(x) = f(x) - \pi = \begin{cases} x+\pi, & -\pi < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x-\pi, & 0 < x \leqslant \pi, \end{cases}$$

则 $\varphi(x)$为奇函数，先求 $\varphi(x)$的傅里叶级数.

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x-\pi)\sin nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x-\pi}{n}\cos nx\right)\Big|_0^\pi + \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \cos nx\mathrm{d}x = -\frac{2}{n}, \end{aligned}$$

故 $$\varphi(x) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,$$

从而 $$f(x) = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx, \ -\pi < x \leqslant \pi.$$

三种解法求得的傅里叶级数是一致的，但计算的繁简程度却不同. 解法 1 要计算六个定积分，解法 2 要计算三个定积分，解法 3 只计算一个定积分：自然是解法 3 最好. 但解法 3 往往不易想到. 这时，我们可以先作出 $f(x)$的图形，然后借助函数的图形特性，特别是考察函数的奇偶性，选择适当的解法. 这样可以极大的简化傅里叶系数的计算.

例 7 将下列函数展开为傅里叶级数：

(1) $f(x)=x^2$, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$;

(2) $f(x)=2\sin(x/3)$, $-\pi\leqslant x<\pi$;

(3) $f(x)=\mathrm{e}^x+1$, $-\pi\leqslant x<\pi$;

(4) $f(x)=|x|$, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

解 本例的函数是比较简单的. 先考察函数是否符合收敛定理，是否奇偶函数；再计算傅里叶系数，求出和函数.

(1) $f(x)=x^2$，$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$，符合收敛定理条件，且 $f(x)$为偶函数. 故 $b_n=0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi x^2\mathrm{d}(\sin nx) \xlongequal{\text{分部}} (-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

因为 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上连续，所以

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx,\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

(2) $f(x)=2\sin(x/3)$，$-\pi\leqslant x<\pi$，符合收敛定理条件，且 $f(x)$ 是奇函数. 故 $a_0=0, a_n=0$.

$$\begin{aligned}
b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2\sin\frac{x}{3}\sin nx\mathrm{d}x\\
&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(1/3-n)x-\cos(1/3+n)x]\mathrm{d}x\\
&=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(n-1/3)x}{n-1/3}-\frac{\sin(n+1/3)x}{n+1/3}\right]\Bigg|_0^{\pi}\\
&=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(n-1/3)\pi}{n-1/3}-\frac{\sin(n+1/3)\pi}{n+1/3}\right)\\
&=\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{-\cos n\pi}{3n-1}-\frac{\cos n\pi}{3n+1}\right)\\
&=(-1)^{n-1}\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n+1}\right)\\
&=(-1)^{n-1}\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{n}{9n^2-1}.
\end{aligned}$$

因为 $f(-\pi)\neq f(\pi)$，所以

$$f(x)=\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{9n^2-1}\sin nx,\ |x|<1.$$

(3) $f(x)=\mathrm{e}^x+1$，$-\pi\leqslant x+\pi$，符合收敛定理条件. 故

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{e}^x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}[\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}+2\pi],$$

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{e}^x+1)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{e}^x\cos nx+\cos nx)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\mathrm{e}^x}{1+n^2}(\cos nx+n\sin nx)+\frac{1}{n}\sin nx\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\\
&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\mathrm{e}^{\pi}\cos n\pi}{1+n^2}-\frac{\mathrm{e}^{-\pi}\cos(-n\pi)}{1+n^2}\right]=\frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)}(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}),
\end{aligned}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{e}^x+1)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{e}^x\sin nx+\sin nx)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x}{1+n^2}(\sin nx - n\cos nx)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-ne^\pi}{1+n^2}\cos n\pi + \frac{ne^\pi}{1+n^2}\cos(-n\pi)\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}n}{\pi(1+n^2)}(e^\pi - e^{-\pi}).$$

因为 $f(-\pi)\neq f(\pi)$，且 $\mathrm{sh}\pi=(e^\pi-e^{-\pi})/2$，故

$$f(x)= \frac{1}{2\pi}[e^\pi - e^{-\pi} + 2\pi] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n^2)}(e^\pi - e^{-\pi})\cos nx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{\pi(1+n^2)}(e^\pi - e^{-\pi})\sin nx$$

$$= 1 + \frac{\mathrm{sh}\pi}{\pi} + \frac{2\mathrm{sh}\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx - n\sin nx),\ |x| < \pi.$$

(4) $f(x)=|x|,-\pi\leqslant x\leqslant\pi$，符合收敛定理条件，且 $f(x)$ 是偶函数. 故 $b_n=0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x dx = \pi,$$

$$a_n= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi x d\sin nx$$

$$\overset{\text{分部}}{=\!=} \frac{2}{n\pi}\left[x\sin nx - \frac{1}{n}\cos nx\right]\Big|_0^\pi = \frac{2}{n\pi}\left[\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n}\right]$$

$$= \frac{(-4)}{(2k+1)^2\pi},\ k = 0,1,2,\cdots.$$

因为 $f(x)=|x|$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，所以

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,\ |x| \leqslant \pi.$$

例 8 展开函数 $f(x)=\arcsin(\sin x)$ 为傅里叶级数.

解 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，化为

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x, & -\pi \leqslant x < -\pi/2, \\ x, & -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2, \\ \pi - x, & \pi/2 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

显然，$f(x)$是奇函数. 故 $a_0=0, a_n=0$.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}x\sin nx\mathrm{d}x+\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-x)\sin nx\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}x\sin nx\mathrm{d}x+(-1)^{n+1}\int_0^{\pi/2}x\sin nx\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}[1+(-1)^{n+1}]\int_0^{\pi/2}x\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2[1+(-1)^{n+1}]}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k,\\ \dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}, & n=2k-1,\end{cases}\quad k=1,2\cdots.$$

因为 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，所以

$$\arcsin(\sin x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x,\ -\infty<x<+\infty.$$

例 9 将下列函数展开为傅里叶级数：

(1) $f(x)=3x^2+1,\ -\pi\leqslant x<\pi$;

(2) $f(x)=\mathrm{e}^x,\ -\pi\leqslant x<\pi$;

(3) $f(x)=\pi^2-x^2,\ -\pi<x\leqslant\pi$;

(4) $f(x)=\begin{cases}bx, & -\pi\leqslant x<0,\\ ax, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$

解 (1) $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\mathrm{d}x=2(\pi^2+1)$,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}(3x^2+1)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{6x}{n}\sin nx\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{6}{n^2\pi}\left[x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{12}{n^2}(-1)^n - \frac{6}{n^3\pi}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = (-1)^n\frac{12}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\sin nx\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{奇函数}} 0.$$

故 $$f(x) = \pi^2 + 1 + 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\ (-\infty, +\infty).$$

(2) $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}(\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi}),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\mathrm{e}^{2x}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}n\sin nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{-1}{2\pi}(\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi}) + \frac{n}{4\pi}\left[\mathrm{e}^{2x}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}n\cos nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{(-1)^n(\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi})}{(n^2+4)\pi} - \frac{n^2}{4}a_n = \frac{2(-1)^n(\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi})}{(n^2+4)\pi},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\mathrm{e}^{2x}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}n\cos nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= -\frac{n}{2}a_n = -\frac{n(-1)^n(\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi})}{(n^2+4)\pi}.$$

故 $$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+4}(2\cos nx - n\sin nx)\right],$$

其中 $x \neq (2n+1)\pi$，$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

(3) $f(x)$为偶函数，故 $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{2}{\pi}(\pi^2 - x^2)\frac{\sin nx}{n}\right]\Big|_0^{\pi} + \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{4}{n\pi}\cdot\frac{x(-\cos nx)}{n}\right]\Big|_0^{\pi} + \frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2},$$

故 $$\pi^2 - x^2 = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx,\ -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

若令 $x=\pi$，则由

$$0=\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos n\pi=\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n^2},$$

得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

(4) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}ax\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}(a-b)$,

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bx\cos nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}ax\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{b}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right]\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{a}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right]\Bigg|_{0}^{\pi}\\&=\frac{1}{n^2\pi}(b-a)(1-\cos n\pi)=\frac{b-a}{n^2\pi}[1-(-1)^n],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bx\sin nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}ax\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{b}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right]\Bigg|_{0}^{\pi}\\&=\frac{b}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi\right)+\frac{a}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi\right)=\frac{a+b}{n}(-1)^{n+1}.\end{aligned}$$

故

$$f(x)=\frac{\pi}{4}(a-b)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{[1-(-1)^n](b-a)}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}(a+b)}{n}\sin nx\right\},$$

其中 $x\neq(2n+1)\pi$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

例 10 $f(x)$是以 2π 为周期的连续函数，其傅里叶系数为 a_0，a_n，b_n.

(1) 求函数 $G(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$ 的傅里叶系数 A_0，A_n，B_n；

(2) 利用题(1)的结果证明巴塞瓦(Parseval)等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

解 因为 $G(x+2\pi)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(2\pi+x+t)\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t=G(x),$$

所以 $G(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，符合收敛定理条件.

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t\ (\text{令 } x+t=u)$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a_0}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t=a_0^2.$$

$$A_n=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\right]\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos nx\mathrm{d}x\right]f(t)\mathrm{d}t\ (\text{令 } x+t=u)$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(u)\cos n(u-t)\mathrm{d}u\right]f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi+t}^{\pi+t}\cos nt f(u)\cos nu\mathrm{d}u\right.$$

$$\left.+\int_{-\pi+t}^{\pi+t}\sin nt f(u)\sin nu\mathrm{d}u\right]f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos nt f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin nt f(t)\mathrm{d}t$$

$$=a_n^2+b_n^2.$$

同样可得 $B_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G(x)\sin nx\mathrm{d}x=a_nb_n-a_nb_n=0.$

(2) 由题(1)得 $G(x)=\dfrac{A_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx$，在 $G(x)$ 中令 $x=0$，得

$$G(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),$$

即
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

例 11 将下列函数展开为傅里叶级数：

(1) $f(x)=|\sin x|$； (2) $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi+x}{2}, & -\pi\leqslant x\leqslant 0, \\ \dfrac{\pi-x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant \pi. \end{cases}$

解 (1) $|\sin x|$是偶函数，故 $b_n=0$.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{\pi} - \cos x\right]\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\cos nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(n+1)x - \sin(n-1)x]\mathrm{d}x \ (n\neq 1) \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1}\right] \\ &= \begin{cases} -\dfrac{4}{(n^2-1)\pi}, & n = 2,4,\cdots, \\ 0, & n = 3,5,\cdots, \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin^2 x}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 0.$$

所以
$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos 2x - \frac{1}{15}\cos 4x - \frac{1}{35}\cos 6x - \cdots\right), \quad -\infty < x < +\infty.$$

(2) $f(x)$是奇函数，故 $a_0=0, a_n=0$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi-x}{2n}\cos nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right] = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2n} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

所以，在$[-\pi,0]\cup(0,\pi)$上，有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx.$$

$f(x)$在 $x=0$ 间断，其傅里叶级数收敛于

$$\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

下面我们讨论不是定义在$[-\pi,\pi]$上的函数展开为傅里叶级数的例子.

当 $f(x)$是$[0,\pi]$上分段光滑的奇函数(或偶函数)时，它的傅里叶级数是正弦级数(或余弦级数)，但在展开前要先对函数作奇延拓(或偶延拓). 所得级数在全数轴上收敛，在$(0,\pi)$内函数的连续点上收敛于函数本身.

例 12 展开下列函数为指定的傅里叶级数：

(1) $f(x)=(\pi-x)/2$, $x\in[0,\pi]$，正弦级数；

(2) $f(x)=x^2$, $x\in(0,\pi)$，正弦级数；

(3) $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,\pi/2),\\ \pi-x, & x\in[\pi/2,\pi],\end{cases}$ 余弦级数；

(4) $f(x)=\begin{cases}3x/2, & x\in[0,\pi/3],\\ \pi/2, & x\in(\pi/3,2\pi/3),\\ 3(\pi-x)/2, & x\in(2\pi/3,\pi],\end{cases}$ 正弦级数.

解 (1) 作奇延拓，再作周期延拓，故

$$a_0=0,\quad a_n=0.$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)\sin nx\mathrm{d}x,\\&=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x-\pi}{2n}\cos nx-\frac{1}{2n^2}\sin nx\right]\Bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{n},\end{aligned}$$

故
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,\ 0<x\leqslant\pi.$$

级数在 $x=0$ 收敛于

$$\frac{-\pi/2+\pi/2}{2}=0.$$

(2) 作奇延拓，再作周期延拓，即考虑 $f(x)=x|x|$ $(-\pi<x$

$<\pi$)的傅里叶展开，故

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0.$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx \mathrm{d}x \\
&= -\frac{2x^2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx \mathrm{d}x \\
&= (-1)^{n-1}\frac{2\pi}{n} + \frac{4}{n^2\pi}\left[x\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin nx \mathrm{d}x\right] \\
&= (-1)^{n-1}\frac{2\pi}{n} + \frac{4}{n^3\pi}[(-1)^n - 1].
\end{aligned}$$

故

$$2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx - \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)} = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x < \pi, \\ 0, & x = \pi. \end{cases}$$

(3) 作偶延拓，再作周期延拓，故 $b_n=0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\pi - x \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\cos nx \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{n}\sin nx\Big|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{\pi/2}^{\pi} \\
&= \frac{-2}{n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{-2}{n^2\pi}(-1)^n + \frac{2}{n^2\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} \\
&= -\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{-2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - \cos\frac{n\pi}{2}\right],
\end{aligned}$$

所以

$$f(x) = \frac{\pi}{8} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - \cos\frac{n\pi}{2}\right]\cos nx,$$

$$x \in [0,\pi/2) \cup (\pi/2,\pi].$$

在 $x=\pi/2$，级数收敛于$\frac{1}{2}\left(0+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$.

(4) 作奇延拓，再作周期延拓，故 $a_0=0, a_n=0$.

$$b_0=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/3}\frac{3}{2}x\sin nx\mathrm{d}x+\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\frac{\pi}{2}\sin nx\mathrm{d}x\right.$$

$$\left.+\int_{2\pi/3}^{\pi}\frac{3}{2}(\pi-x)\sin nx\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{3}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin nx-\frac{x}{n}\cos nx\right]\Bigg|_0^{\pi/3}+\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]\Bigg|_{\pi/3}^{2\pi/3}$$

$$+3\left[-\frac{1}{n}\cos x\right]\Bigg|_{2\pi/3}^{\pi}-\frac{3}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin nx-\frac{x}{n}\cos nx\right]\Bigg|_{2\pi/3}^{\pi}$$

$$=\frac{3}{n^2\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{3}+\sin\frac{2n\pi}{3}\right)=\frac{6}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{6}$$

$$=\frac{6}{\pi(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{6}.$$

故

$$f(x)=\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)^{\pi}}{6}\sin(2n-1)x,$$

$$0\leqslant x\leqslant\pi.$$

例 13 证明：在$[0,\pi]$上，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2).$$

证 将函数 $f(x)=3x^2-6\pi x$ 作偶延拓，展开为余弦级数，故 $b_n=0$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(3x^2-6\pi x)\mathrm{d}x=-4\pi^2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(3x^2-6\pi x)\cos x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[3\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x-6\pi\int_0^{\pi}x\cos x\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[3\left(\frac{\pi}{n^2}2\cos n\pi\right)-6\pi\left(\frac{1}{n^2}\cos n\pi-\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{12}{n^2}.$$

故 $$3x^2-6\pi x=-2\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{n^2}\cos nx,$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2).$$

例 14 证明:在$[0,\pi]$上,有

(1) $x(\pi-x)=\dfrac{\pi^2}{6}-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}$;

(2) $x(\pi-x)=\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$.

证 考虑其正弦级数与余弦级数.

(1) 对 $f(x)=x(\pi-x)$, $0\leqslant x\leqslant\pi$,作偶延拓,故 $b_n=0$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\mathrm{d}x=\left[x^2-\frac{2x^3}{3\pi}\right]\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{3},$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\cos nx\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x\\&=2\left[\frac{1}{n^2}\cos nx+\frac{x}{n}\sin nx\right]\Bigg|_0^{\pi}\\&\quad-\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n^2}(nx\sin nx+2\cos nx)-\frac{2}{n}\sin nx\right]\Bigg|_0^{\pi}\\&=2\left[\frac{1}{n^2}(-1)^n-\frac{1}{n^2}\right]-\frac{4}{n^2}(-1)^n\\&=\frac{2}{n^2}(-1)^{n+1}-\frac{2}{n^2}=\frac{-4}{(2n)^2}.\end{aligned}$$

所以,$f(x)=x(\pi-x)$在$[0,\pi]$上的余弦级数为

$$x(\pi-x)=\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{(2n)^2}\cos 2nx=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2nx.$$

(2) 对 $f(x)=x(\pi-x)$, $0\leqslant x\leqslant\pi$,作奇延拓.故

$$a_0=0,\qquad a_n=0.$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\cdot\pi\int_0^{\pi}x\sin nx-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin^2 nx\mathrm{d}x\\&=2\left[\frac{1}{n^2}\sin nx-\frac{x}{n}\cos nx\right]\Bigg|_0^{\pi}\end{aligned}$$

$$-\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n^2}(2\sin x - nx\cos nx) + \frac{2}{n^2}\cos nx\right]\Bigg|_0^\pi$$

$$= -\frac{2\pi}{n}(-1)^n + \frac{2\pi}{n}(-1)^n + \frac{4}{\pi n^3}[(-1)^n - 1]$$

$$= \frac{8}{\pi(2n-1)^3}.$$

所以，$f(x)=x(\pi-x)$在$[0,\pi]$上的正弦级数为

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x.$$

例 15 利用上例结果证明：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$； (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

证 令 $x=\pi/2$，分别代入 $x(\pi-x)$ 的正弦级数与余弦级数，可得

$$(1)\ \frac{\pi}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n(\pi/2)}{n^2},$$

即
$$\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},$$

故
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$(2)\ \frac{\pi}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\cdot(\pi/2)}{(2n-1)^3}$$

$$= \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi - \pi/2)}{(2n-1)^3}.$$

因为 $\sin\left(n\pi - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin n\pi\cos\dfrac{\pi}{2} - \cos n\pi\sin\dfrac{\pi}{2} = (-1)^{n-1}$，

所以
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

例 16 证明：在$(0,\pi)$内，有

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)}{2n-1} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \cdots,$$

并求等式右边级数之和.

证 将 $f(x)=\pi/4$ 展开为正弦级数. 故

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0.$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2n}[1-(-1)^n] = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \dfrac{1}{2k-1}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

$$f(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \cdots.$$

在上式中令 $x=\pi/2$,即得

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n+1} + \cdots.$$

利用傅里叶级数还可以求数项级数的和,就是把所求数项级数的和化为傅里叶级数在某一点的值. 解题的关键在于能适当地选择一点(有时还要选择一个适当的函数),使得傅里叶级数的和函数在该点的值恰好等于所求数项级数之和.

例 17 在$(-\pi,\pi)$内将 $f(x)=|x|$ 展开为傅里叶级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ 的和.

解 $f(x)=|x|$是偶函数,故 $b_n=0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2}.$$

因为在$(-\pi,\pi)$内 $f(x)$分段光滑且连续,故

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n+1)x + \cdots\right).$$

令
$$S=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots,$$
$$S_1=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\cdots,$$
$$S_2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots,$$
$$S_3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+\cdots.$$
在 $f(x)$ 中令 $x=0$，有
$$S_1=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}.$$
而
$$\begin{cases}S_1=S_2+S_3=\pi^2/8,\\ 3S_2-S_1=0(\text{由 } S_2=S/4=(S_1+S_2)/4),\end{cases}$$
得
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=S_2=\frac{S_1}{3}=\frac{\pi^2}{24},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}=S_3=\frac{\pi^2}{12}.$$

例 18 将 $f(x)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{e^\pi-e^{-\pi}}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开为傅里叶级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+(2n)^2}$ 的和.

解 $f(x)$ 是偶函数，故 $b_n=0$.
$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{e^\pi-e^{-\pi}}dx=1,$$
$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{e^\pi-e^{-\pi}}\cos nx dx\\&=\frac{1}{e^\pi-e^\pi}\left[\int_0^{\pi}e^x\cos nx dx+\int_0^{\pi}e^{-x}\cos nx dx\right]\\&=\frac{1}{e^\pi-e^{-\pi}}\left[\frac{e^\pi\cos n\pi}{1+n^2}-\frac{1}{1+n^2}+\frac{e^{-\pi}(-\cos n\pi)}{1+n^2}-\frac{(-1)}{1+n^2}\right]\\&=\frac{(-1)^n}{(1+n^2)}.\end{aligned}$$

而 $$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi+0)}{2}=f(\pi)=f(-\pi).$$

故 $$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nx,\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

当取 $x=\pi/2$ 时，有

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+2^2}+\frac{1}{1+4^2}-\cdots+\frac{1}{1+(2n)^2}+\cdots,$$

所以 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+(2n)^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}-\frac{1}{2}.$$

例 19 将$[0,2\pi]$上周期为2π的函数$f(x)=\frac{x}{4}(2\pi-x)$展开为傅里叶级数，并求出$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

解 $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{4}(2\pi-x)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{4}(2\pi-x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x\cos nx\mathrm{d}x-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos x\mathrm{d}x=-\frac{1}{n^2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{4}(2\pi-x)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x\sin nx\mathrm{d}x-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx\mathrm{d}x=0.$$

因为 $f(0+0)=f(2\pi-0)$，所以

$$\frac{x}{4}(2\pi-x)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx,\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi.$$

令 $x=0$，得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

因为$\frac{x}{4}(2\pi-x)-\frac{\pi^2}{6}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^2}\cos nx$，逐项积分，有

$$\int_0^x\left[\frac{t}{4}(2\pi-t)-\frac{\pi^2}{6}\right]\mathrm{d}t=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^x\cos nt\mathrm{d}t,$$

解得 $\frac{1}{6}\pi^2 x-\frac{1}{4}\pi x^2+\frac{x^3}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin nx,\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi.$

再逐项积分两次，得在$[0,2\pi]$上有

$$-\frac{1}{36}\pi^2 x^3+\frac{1}{48}\pi x^4-\frac{x^5}{240}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\left(\frac{\sin nx}{n}-x\right),$$

令 $x=2\pi$，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{90}\pi^4.$$

第二节　以 $2l$ 为周期的函数的展开式

主要内容

1. 设 f 是以 $2l$ 为周期的函数，在$[-l,l]$上可积，则

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots.$$

2. 若 f 是以 $2l$ 为周期的偶函数(或定义在$[-l,l]$上的偶函数)，则 f 的傅里叶级数是余弦级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

3. 若 f 是以 $2l$ 为周期的奇函数(或定义在$[-l,l]$上的奇函数)，则 f 的傅里叶级数是正弦级数

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

疑难解析

1. 讨论以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数展开式的意义.

答 在上节中,我们讨论的函数 f 是以 2π 为周期的周期函数.但实际上更多的周期函数是以 $2l$ 为周期的,因此需要讨论以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数展开式.

一般地,当 f 是以 $2l$ 为周期的函数时,通过变量代换:$\pi x/l=t$ 或 $x=lt/\pi$,可以把 f 变换成以 2π 为周期的函数,再依上节的公式展开.

当 f 不是周期函数时.如果函数 f 定义在$(-\infty,+\infty)$内(或$[-l,l]$上,或长度为 $2l$ 的区间上),则可以引入一个辅助函数 f^*,令 f^* 与 f 在$[-l,l]$内相同.然后,将 f^* 按周期延拓到整个数轴,成为以 $2l$ 为周期的周期函数.此时,可以在区间$[-l,l]$上将 f^* 展开为傅里叶级数,以满足研究函数 f 的需要.

因而,以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数展开式的讨论对我们研究一般的周期函数与非周期函数是十分有用且至关重要的.

方法、技巧与典型例题分析

本节解题方法与技巧与上节基本相同,所要注意的是 l 的确定与傅里叶级数收敛的区间的确定,一定要认真思考.

例 1 设 $f(x)$是以 $2l$ 的周期的函数,在区间$(-l,l]$上,$f(x)=x+|x|$,求 $f(x)$的傅里叶级数.

解 $f(x)$在$(-l,l]$上表示为

$$f(x)=\begin{cases}0, & -l<x<0,\\ 2x, & 0\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

函数 $f(x)$满足收敛定理条件,可以展开为傅里叶级数.

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^l 2x\mathrm{d}x=l,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_0^l 2x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\left[x\sin\frac{n\pi x}{l}\right]\Big|_0^l-\int_0^l\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2l}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1],$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_0^l 2x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=(-1)^{n-1}\frac{2l}{n\pi}.$$

故 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内，除 $x=(2k+1)l$ 外，傅里叶级数为

$$f(x)=\frac{l}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2l}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]\cos\frac{n\pi x}{l}\right.$$
$$\left.+(-1)^{n+1}\frac{2l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\right].$$

在 $x=(2k+1)l$ $(k=0,\pm1,\cdots)$，级数收敛于

$$\frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}=\frac{l}{2}.$$

例 2 求下列函数的傅里叶级数：

(1) $f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 2;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}2-x, & 0\leqslant x<4,\\ x-6, & 4\leqslant x\leqslant 8;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}1+\cos\pi x, & -1<x<1,\\ 0, & -2\leqslant x\leqslant -1 \text{ 和 } 1\leqslant x\leqslant 2;\end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 1/2,\\ -1, & 1/2\leqslant x<1.\end{cases}$

解 (1) $a_0=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 x\mathrm{d}x=1,$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1],$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}(-1)^n.$$

所以,在(−2,2)内,有

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]\cos\frac{n\pi x}{2}-\frac{2(-1)^n}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right].$$

在点 $x=\pm 2$,傅里叶级数收敛于$\frac{2+0}{2}=1$.

(2) $$a_0=\frac{1}{4}\left[\int_0^4(2-x)\mathrm{d}x+\int_4^8(x-6)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4+\left(\frac{x^2}{2}-6\pi\right)\Big|_4^8\right]=0,$$

$$a_n=\frac{1}{4}\left[\int_0^4(2-x)\cos\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x+\int_4^8(x-6)\cos\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{8}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}-\frac{4x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}-\frac{16}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{4}\right]\Bigg|_0^4$$

$$+\frac{1}{4}\left[\frac{4x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}+\frac{16}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{4}-\frac{24}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\right]\Bigg|_4^8$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{-16}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1)]+\frac{16}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\right\}$$

$$=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ \dfrac{16}{n^2\pi^2}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{4}\left[\int_0^4(2-x)\sin\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x+\int_4^8(x-6)\sin\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{-8}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4}+\frac{4x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4}-\frac{16}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{4}\right]\Bigg|_0^4$$

$$+\frac{1}{4}\left[\frac{-4x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4}+\frac{16}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{4}+\frac{24}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4}\right]\Bigg|_4^8=0.$$

所以,在(0,8)内,有

$$f(x)=\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{4}.$$

(3) $$a_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1+\cos\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]\Big|_{-1}^{1}=1,$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1+\cos\pi x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1\left[\cos\left(\pi+\frac{n\pi}{2}\right)x + \cos\left(\pi-\frac{n\pi}{2}\right)x\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2\pi+n\pi}\sin\left(\pi+\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{2\pi-n\pi}\sin\left(\pi-\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= \left[\frac{2}{(2n-1)\pi} - \frac{1}{2-(2n-1)\pi} + \frac{1}{2-(2n+1)\pi}\right](-1)^{n-1}$$

$$= \frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{(2n-1)[4-(2n-1)^2]}(-1)^{n-1},$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1+\cos\pi x)\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x = 0.$$

因为 $f(x)$在$[-2,2]$上连续,所以

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)[4-(2n-1)^2]}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

(4) $a_0 = \int_{-1}^{0}x\mathrm{d}x + \int_0^{1/2}\mathrm{d}x + \int_{1/2}^{1} -\mathrm{d}x = -\frac{1}{2},$

$$a_n = \int_{-1}^{0}x\cos n\pi x\mathrm{d}x + \int_0^{1/2}\cos n\pi x\mathrm{d}x - \int_{1/2}^{1}\cos n\pi x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{0}\sin n\pi x\mathrm{d}x + \frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_0^{1/2} - \frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_{-1}^{0} + \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2} + \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$= \frac{2}{(2k-1)^2\pi^2} + \frac{2(-1)^{k-1}}{(2k-1)\pi},$$

$$b_n = \int_{-1}^{0}x\sin n\pi x\mathrm{d}x + \int_0^{1/2}\sin n\pi x\mathrm{d}x - \int_{1/2}^{1}\sin n\pi x\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_{-1}^{0} + \int_1^0\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\mathrm{d}x$$

$$- \frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^{1/2} + \frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\Big|_{-1}^{0}$$

$$+\frac{1-\cos(n\pi/2)}{n\pi}+\frac{(-1)^n-\cos(n\pi/2)}{n\pi}$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left(1-2\cos\frac{n\pi}{2}\right).$$

故，在$(-1,0)\cup(0,1/2)\cup(1/2,1)$上，有

$$f(x)=-\frac{1}{4}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)^2\pi^2}+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi}\right]\cos(2n-1)\pi x$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left(1-2\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin n\pi x.$$

例 3 将下列函数展开成傅里叶级数：

(1) $f(x)=2+|x|,\ -1\leqslant x\leqslant 1$，并求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$之和；

(2) $f(x)=\begin{cases}\cos(n\pi x/l), & 0\leqslant x\leqslant l/2,\\ 0, & l/2<x\leqslant l,\end{cases}$展开为余弦级数.

解 (1) $f(x)$为偶函数，故$b_n=0$.

$$a_0=2\int_0^1(2+x)\mathrm{d}x=5,$$

$$\begin{aligned}a_n&=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x\mathrm{d}x\\&=4\int_0^1\cos n\pi x\mathrm{d}x+2\int_0^1 x\cos n\pi x\mathrm{d}x\\&=2\left[\frac{1}{n^2\pi}\sin n\pi x+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi\right]\Bigg|_0^1\\&=\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi^2}, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}\end{aligned}$$

故 $f(x)=\dfrac{5}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x,\ -1\leqslant x\leqslant 1.$

令$x=0$，得 $$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

设$S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}, S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)^2}$，则$S_1+S_2=S, S_2=\dfrac{S}{4}=$

$\dfrac{S_1+S_2}{2}$，于是 $S_2=\dfrac{1}{3}S_1=\dfrac{\pi^2}{24}$.

从而
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=S_1+S_2=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{6}.$$

（2）进行偶延拓，故 $b_n=0$.

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^{l/2}\cos\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

$$a_1=\frac{2}{l}\int_0^{l/2}\cos\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{1}{l}\int_0^{l/2}\left(1+\cos\frac{2\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}+\int_0^{l/2}\cos\frac{2\pi x}{l}\mathrm{d}\,\frac{x}{l}=\frac{1}{2},$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^{l/2}\cos\frac{\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{l}\int_0^{l/2}\left[\cos\frac{(1-n)\pi x}{l}+\cos\frac{(1+n)\pi x}{l}\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1-n}\sin\frac{(-n)\pi x}{l}+\frac{1}{1+n}\sin\frac{(1+n)\pi x}{l}\right]\Bigg|_0^{l/2}$$
$$=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}, & n=2k\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

$f(x)$在$(0,l)$内连续，延拓后在 $x=0,x=l$ 连续，故在$[0,l]$上有

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{l}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\cos\frac{n\pi}{l}x.$$

例 4 设 $f(x)=10-x,5<x<15,f(x+10)=f(x)$，求 $f(x)$ 的傅里叶级数.

解 $T=10$，故 $f(x)$可写为 $f(x)=-x$，$(-5,5)$.

$f(x)$是奇函数，故 $a_0=0,a_n=0$.

$$b_n=\frac{2}{5}\int_0^5(-x)\sin\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{10}{n\pi}.$$

故
$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{10}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}.$$

例 5 如图 9.1 所示函数的解析式为

$$f(x)=\begin{cases}2E, & 0\leqslant x\leqslant \tau,\\ E, & \tau<x<2\tau,\end{cases}$$

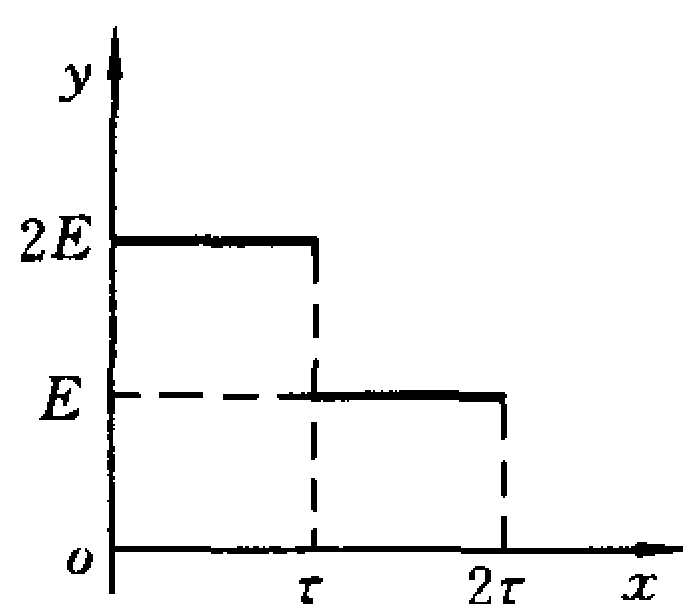


图 9.1

试展开为余弦级数(取前四项).

解 进行偶延拓,故 $b_n=0$.

$$a_0=\frac{2}{2\tau}\left(\int_0^{\tau}2E\mathrm{d}x+\int_{\tau}^{2\tau}E\mathrm{d}x\right)=3E,$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\tau}\left[\int_0^{\tau}2E\cos\frac{n\pi x}{2\tau}\mathrm{d}x+\int_{\tau}^{2\tau}E\cos\frac{n\pi x}{2\tau}\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{\tau}\left[2E\frac{2\tau}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2\tau}\Big|_0^{\tau}+E\frac{2\tau}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2\tau}\Big|_{\tau}^{2\tau}\right]\\&=\frac{2E}{n\tau}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ (-1)^{k-1}\dfrac{2E}{(2k-1)\pi}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}\end{aligned}$$

所以,在 $(0,\tau)\cup(\tau,2\tau)$ 上,有

$$f(x)=\frac{3E}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2E}{(2k-1)\pi}\cos\frac{2k-1}{2\tau}\pi x.$$

在 $x=\tau$,傅里叶级数收敛于 $3E/2$.

例 6 将 $f(x)=x\ (0\leqslant x\leqslant l)$ 展开为周期为 $2l$ 的傅里叶级数.

(1) 用函数 $F(x)=x\ (0\leqslant x\leqslant 2l)$;

(2) 展开为余弦级数;

(3) 展开为正弦级数.

解 (1) $a_0=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^{2l}x\mathrm{d}x=2l,\quad a_n=\dfrac{1}{l}\int_0^{2l}x\cos\dfrac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=0,$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{l}\int_0^{2l}x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{l}\left[-\frac{lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]\Big|_0^{2l}=-\frac{2l}{n\pi}.\end{aligned}$$

在 $[0,l]$ 上,有 $f(x)=F(x)$,所以,在 $(0,l]$ 上,有

$$f(x)=l-\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

在 $x=0$,傅里叶级数收敛于 l.

(2) 进行偶延拓,故 $b_0=0, a_0=\frac{2}{l}\int_0^l x\mathrm{d}x=l$.

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\left(\frac{lx}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{l}\right)\Big|_0^l$$

$$=\frac{2l}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0, & n \text{ 为偶数},\\ \frac{-4l}{n^2\pi^2}, & n \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

所以,在$[0,l]$上,有

$$f(x)=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{l}.$$

(3) 进行奇延拓,故 $a_0=0, a_n=0$.

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\left(-\frac{lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\Big|_0^l$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2l}{n\pi}.$$

所以,在$[0,l)$上,有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

在 $x=l$ 处,傅里叶级数收敛于零.

注意 三种情形下傅里叶级数收敛于 $f(x)$ 的区间是不同的.

第三节 收敛定理

主要内容

1. 贝塞尔不等式 若函数 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上可积,则

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x,$$

其中 a_n, b_n 是函数 $f(x)$ 的傅里叶系数.

2. 黎曼-勒贝格(Riemann-Lebesgue)定理　若 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的可积函数,则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0,\quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0.$$

3. 若 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的可积函数,则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(n+1/2)x\mathrm{d}x = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(n+1/2)x\mathrm{d}x = 0.$$

4. 若 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数,且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积,则其傅里叶级数部分和 $S_n(x)$ 可表示为(狄利克雷积分)

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)}\mathrm{d}t.$$

当 $t=0$ 时,被积函数中的不定式由极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} = n+\frac{1}{2}$$

确定.

5. 收敛定理(狄利克雷-约当定理)　若以 2π 为周期的函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上分段光滑,则在每一点 $x\in[-\pi,\pi]$, f 的傅里叶级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 收敛于 f 在点 x 的左、右极限的算术平均值,即

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

其中 a_n,b_n 是 f 的傅里叶系数.

疑难解析

1. 收敛定理有哪些不同的表述方式?

答　关于傅里叶级数的敛散性有许多不同的判别法. 有些判别法,如狄尼条件与李普希兹条件判别法只能保证函数在一点展

开为傅里叶级数，而狄利克雷-约当判别法可以保证函数在整个区间上展开为傅里叶级数.

在保留函数 $f(x)$ 的周期性的情况下，收敛定理可以表述为

(1) $f(x)$ 囿变；

(2) $f(x)$ 只有有限个第一类间断点和有限个极值点；

(3) $f(x)$ 可以表示为两个非负递增函数之差；

(4) $f(x)$ 可以表示为两个递增函数之差.

只要满足这四条中的一条，就有

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

$$\to f^*(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) - f(x-0)].$$

因为后三条中的每一条都是函数囿变的充要条件.

因为当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数 $f'(x)$ 时，$f'(x)$ 有界，即 $|f'(x)| \leqslant M$，于是

$$\begin{aligned}&\sup\sum|f(x_i) - f(x_{i-1})|\\&= \sup\sum|f'(\eta_i)||x_i - x_{i-1}| \leqslant M(b-a),\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上囿变；若 $f(x)$ 分段光滑，则 $[a,b]$ 可分成有限多个子区间，在每个小区间上 $f(x)$ 有连续导数 $f'(x)$，故在每个子区间上囿变，即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上囿变. 从而有

(1) 如果 $f(x)$ 分段光滑，则 $S_m(x) \to f^*(x)$；

(2) 若 $f(x)$ 是以 2π 为周期的囿变连续函数（或分段光滑的连续函数），则 $f(x)$ 的傅里叶级数在全区间上一致收敛于 $f(x)$.

方法、技巧与典型例题分析

涉及傅里叶级数敛散性的问题大多是证明题，除了运用函数项级数的有关命题外，大多数命题需要利用积分的技巧来完成.

例 1 设 f 是周期为 2π 的可积函数，记

$$S_m(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

$$\sigma_m(x)=\frac{1}{m}[S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_{m-1}(x)].$$

证明：(1) $S_m(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)}\mathrm{d}t$; ①

(2) $\sigma_m(x)=\frac{1}{2m\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t.$ ②

其中 $$S_0(x)=a_0/2.$$

证 (1) 利用被积函数的周期性，有

$$\begin{aligned}S_m(x)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{m}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\mathrm{d}t\right]\cos nx\\&\quad+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{m}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\mathrm{d}t\right]\sin nx\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}(\cos nt\cos nx+\sin nt\sin nx)\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos n(t-x)\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+\tau)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos n\tau\right]\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+\tau)\frac{\sin(m+1/2)\tau}{\sin(\tau/2)}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

取 $f(x)=1$，有 $S_0(x)=a_0/2=1$，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)}\mathrm{d}t=1.$$

此式与式①都称为狄利克雷积分.

又 $$\frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)}=\frac{\sin(m+1/2)t\sin(t/2)}{\sin^2(t/2)}$$

$$= \frac{\cos mt - \cos(m+1)t}{1-\cos t},$$

故 $$S_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\frac{\cos mt - \cos(m+1)t}{1-\cos t}\mathrm{d}t.$$

(2) 由题(1)的结果,有

$$\begin{aligned}\sigma_m(x) &= \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1} S_n(x)\\ &= \frac{1}{2m\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\cos nt - \cos(n+1)t}{1-\cos t}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2m\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

当 $f(x)=1$ 时,$\sigma_m(x)=1$,得

$$\frac{1}{2m\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t.$$

此式与式②均称为费吉尔(Fejer)积分,$\sigma_m(x)$称为积分和.

例 2 证明:若 $f(x)$是以 2π 为周期的可积函数,则有

$$\begin{aligned}&f(x) - S_m(x)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(m+1/2)^t}{\sin(t/2)}[2f(x) - f(x+t) - f(x-t)]\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

证 由例(1)知

$$\begin{aligned}f(x) = f(x)\cdot 1 &= f(x)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

而 $$\begin{aligned}S_m(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x+t)\,\frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)}\mathrm{d}t\right.\\ &\quad\left.+\int_0^{\pi} f(x+t)\,\frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)}\mathrm{d}t\right]\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t) + f(x-t)]\,\frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

两式相减，即得

$$
\begin{aligned}
&f(x)-S_m(x)\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)}[2f(x)-f(x+t)-f(x-t)]\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

例 3 证明：若 $f(x)$是以 2π 为周期的连续函数，则

$$
\lim_{m\to\infty}\sigma_m(x)=f(x).
$$

证 由例 1 知$\frac{1}{2m\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t=1$，故

$$
\sigma_m(x)=\frac{1}{2m\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t,
$$

$$
f(x)=\frac{1}{2m\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t.
$$

因为 $f(x)$在闭区间上连续，所以 $f(x)$一致连续，故$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得只要$|t|>\delta$，则对一切 x，有$|f(x+t)-f(x)|<\varepsilon/2$.

若记 M 为$|f(x)|$在$[-\pi,\pi]$上的最大值，则

$$
\begin{aligned}
&|\sigma_m(x)-f(x)|\\
&=\frac{1}{2m\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)-f(t)]\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t\right|\\
&<\frac{2M}{2m\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t+\frac{\varepsilon}{4m\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t\\
&\quad+\frac{2M}{2m\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

其中$\frac{1}{2m\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t<\frac{1}{2m\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t=1$，

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\delta}\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t&=\int_{\delta}^{\pi}\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t\\
&<\int_{\delta}^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{\sin^2(\delta/2)}<\frac{\pi}{\sin^2(\delta/2)},
\end{aligned}
$$

所以

$$
|\sigma_m(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{m\sin^2(\delta/2)}.
$$

在 n 充分大时，取 $m>n$，就有$\frac{2M}{m\sin^2(\delta/2)}<\frac{\varepsilon}{2}$，于是

$$|\sigma_m(x) - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

即
$$\lim_{m\to\infty}\sigma_m(x) = f(x).$$

本命题称为费吉尔定理，说明收敛是一致收敛的，从而当 $|\sigma_m(x)-f(x)|<\sqrt{\varepsilon/2\pi}$ 时，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\sigma_m(x) - f(x)|^2\mathrm{d}x < \varepsilon \to 0.$$

例 4 设 $S_n(x) = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx$， $S_0(x) = \dfrac{1}{2}$，且

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_n(x)}{n+1},$$

证明：(1) $\sigma_n(x)=\dfrac{1}{2(n+1)}\left[\dfrac{\sin(n+1)x/2}{\sin(x/2)}\right]^2$；

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n(x)\mathrm{d}x = \pi.$

证 (1) 利用三角公式

$$2\sin(x/2)\cos kx = \sin(k + 1/2)x - \sin(k - 1/2)x,$$

有
$$S_0(x) = \frac{1}{2} = \frac{\sin(x/2)}{2\sin(x/2)}.$$

$$\begin{aligned} S_n(x) &= 1/2 + \sum_{k=1}^{n}\cos kx \\ &= \frac{\sin(x/2) + \sum\limits_{k=1}^{n}[\sin(k + 1/2)x - \sin(k - 1/2)x]}{2\sin(x/2)} \\ &= \frac{\sin(n + 1/2)x}{2\sin(x/2)}. \end{aligned}$$

再由
$$2\sin(x/2)\sin(k+1/2)x=\cos kx-\cos(k+1)x,$$

得
$$\sin(k + 1/2)x = \frac{\cos kx - \cos(k + 1)x}{2\sin(x/2)},$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\left(k + \frac{1}{2}\right)x &= \frac{1}{2\sin(x/2)}\sum_{k=0}^{n}[\cos kx - \cos(k + 1)x] \\ &= \frac{1 - \cos(n + 1)x}{2\sin(x/2)} = \frac{\sin^2(n + 1)x/2}{\sin(x/2)}. \end{aligned}$$

于是 $\sigma_n(x)=\dfrac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1}$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}S_k(x)=\frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(k+1/2)x}{\sin(x/2)}$$

$$=\frac{1}{2(n+1)}\left[\frac{\sin(n+1)x/2}{\sin(x/2)}\right]^2.$$

(2) 因为原点是 $\sigma_n(x)$的可去间断点，所以 $\sigma_n(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积. 又 $\sigma_n(x)$是偶函数，故

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\sigma_n(x)\mathrm{d}x,$$

而
$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\text{（见例 1(1)）.}$$

于是

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\sigma_n(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{n+1}\int_0^{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(k+1/2)x}{\sin(x/2)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\pi}\frac{\sin(k+1/2)x}{\sin(x/2)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n+1}\cdot(n+1)\frac{\pi}{2}=\pi.$$

例 5 设 $0<\alpha<1$，$f(x)=\cos\alpha x$ 在$(-\pi,\pi)$内的傅里叶级数为

$$\cos\alpha x=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos nx\right],$$

证明：(1) $\dfrac{\pi}{\sin\alpha\pi}=\dfrac{1}{\alpha}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}$；

(2) $\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{1}{x}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}\ (0<x<\pi)$；

(3) $\pi=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2}\mathrm{d}x$；

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\pi.$

证 (1) 在所给傅里叶级数中令 $x=0$,即得

$$\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}=\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos nx.$$

(2) $\forall\ x\in(0,\pi)$,令 $\alpha=x/\pi$,则 $0<\alpha<1$,代入题(1)的结果,化简得

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}.$$

(3) 将上面结果改写为

$$1=\frac{\sin x}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2}\quad(0<x<\pi),$$

令

$$u_0(x)=\begin{cases}\sin x/x, & 0<x<\pi,\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

$$u_1(x)=\begin{cases}-2x\sin x/(x^2-\pi^2), & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 1, & x=\pi,\end{cases}$$

$$u_n(x)=(-1)^n\frac{2x\sin nx}{x^2-nx^2\pi^2}\ (n\geqslant 2,0\leqslant x\leqslant\pi),$$

则$\forall\ n\geqslant 0,u_n(x)$在$[0,\pi]$上连续,且由题(1)有

$$1=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)\quad(0\leqslant x\leqslant\pi).$$

当 $n\geqslant 2$ 时,$\forall\ x\in[0,\pi]$,有

$$|u_n(x)|\leqslant\frac{2\pi}{n^2\pi^2-\pi^2}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2-1}.$$

而$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}\leqslant\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2}<+\infty$,所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$在$[0,\pi]$上收敛且一致收敛,故可在$[0,\pi]$上逐项积分,得

$$\pi=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}u_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\int_0^{\pi}\frac{2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2}\mathrm{d}x.$$

(4) 将所给无穷区间上的积分转化为有限区间上的积分的级数,得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx+\sum_{n=1}^\infty\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\sum_{n=1}^\infty\int_{-n\pi}^{-(n-1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx$$

$$=\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx+\sum_{n=1}^\infty\int_0^\pi\frac{\sin(t+n\pi)}{t+n\pi}dt+\sum_{n=1}^\infty\int_0^\pi\frac{\sin(t-n\pi)}{t-n\pi}dt$$

$$=\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx+\sum_{n=1}^\infty(-1)^n\int_0^\pi\left[\frac{\sin t}{t+n\pi}+\frac{\sin t}{t-n\pi}\right]dt$$

$$=\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx+\sum_{n=1}^\infty(-1)^n\int_0^\pi\frac{2t\sin t}{t^2-n^2\pi^2}dt=\pi(\text{由题}(3)).$$

事实上，若将题给傅里叶级数写成

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cos\alpha x}{\sin\alpha\pi}=\frac{1}{2\alpha}+\sum_{n=1}^\infty(-1)^n\frac{\alpha\cos nx}{\alpha^2-\pi^2},$$

在式中令 $x=\pi$，再将 $\alpha\pi$ 改写为 x，可得

$$\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{1}{x-n\pi}+\frac{1}{x+n\pi}\right).$$

利用 $\tan x=-\cot(x-\pi/2)$，即得

$$\tan\alpha=-\sum_{n=1}^\infty\left[\frac{1}{x-(2n+1)\pi/2}+\frac{1}{x+(2n-1)\pi/2}\right]-\frac{2}{2x-\pi}.$$

可见，利用傅里叶级数的收敛性质，能通过一个函数的傅里叶级数得到许多有用的公式.

例 6 设 f 在$[-\pi,\pi]$上可积且平方可积，证明贝塞尔不等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^\infty(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f^2(x)dx$$

成立. 其中 $a_0,a_n,b_n(n=1,2,\cdots)$是 f 在$[-\pi,\pi]$上的傅里叶系数.

证 讨论积分$\int_{-\pi}^\pi[f(x)-S_n(x)]^2dx$，其中

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^\infty(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

因为
$$|f(x)-S_n(x)|^2$$
$$=(f(x)-S_n(x))(\overline{f(x)}-\overline{S_n(x)})$$
$$=|f(x)|^2-2\mathrm{Re}S_n(x)f(x)+|S_n(x)|^2,$$

而 $\int_{-\pi}^{\pi} 2\mathrm{Re}S_n(x)f(x)\mathrm{d}x = 2\mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)f(x)\mathrm{d}x$

$$= 2\pi\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)(a_k^2+b_k^2)\right],$$

$$\int_0^{2\pi} |S_n(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{\pi a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^2(a_k^2+b_k^2)\pi,$$

所以 $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2\mathrm{d}x$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\mathrm{d}x + \frac{\pi a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^2(a_k^2+b_k^2)\pi$$

$$- 2\pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)(a_k^2+b_k^2)\right]$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\mathrm{d}x - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$$

$$+ \frac{\pi}{n^2}\sum_{n=1}^{\infty}k^2(a_k^2+b_k^2).$$

由
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

得 $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\mathrm{d}x \geqslant \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2) - \frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2(a_k^2+b_k^2).$

当 $n\to\infty$ 时，有 $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2(a_k^2+b_k^2)=0$，故

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

例 7 若 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是正项数列且单调减少并趋向于零，证明：级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 在任何区间 $0\leqslant\delta\leqslant x\leqslant 2\pi-\delta$ 上一致收敛.

证 因为，有

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin[(n+1)x/2]\sin(nx/2)}{\sin(x/2)},$$

$$C_n = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin[(n+1/2)x]}{2\sin(x/2)}.$$

则 $$|S_n|<\frac{1}{\sin(\delta/2)}=\eta,\quad |C_n|<\frac{1}{2\sin(\delta/2)}=\frac{\eta}{2}.$$

由于$\{a_n\}$，$\{b_n\}$单调减少并趋向于零，且为正项数列，故依狄利克雷判别法知，所证级数收敛.

由$|S_n|<\eta$，$|C_n|<\frac{\eta}{2}$，即有

$$R_m(x)=\sum_{k=m+1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\to 0.$$

令 $$R'_m(x)=\sum_{k=m+1}^{\infty}a_k\cos kx,\quad R''_m(x)=\sum_{k=m+1}^{\infty}b_k\sin kx,$$

则 $$\begin{aligned}&R'_n(x)-R'_{n+p}(x)\\&=a_{n+1}\cos(n+1)x+\cdots+a_{n+p}\cos(n+p)x\\&=a_{n+1}(C_{n+1}-C_n)+\cdots+a_{n+p}(C_{n+p}-C_{n+p-1})\\&=-a_{n+1}C_n+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_k-a_{k+1})C_k+a_{n+p}C_{n+p}.\end{aligned}$$

故 $$\begin{aligned}&|R'_n(x)-R'_{n+p}(x)|\\&<[a_{n+1}+(a_{n+1}-a_{n+p})+a_{n+p}]\frac{\eta}{2}=a_{n+1}\eta.\end{aligned}$$

由$\{a_n\}\to 0$，故当$a_{N+1}<\varepsilon/\eta$时，$\forall\ n>N$及$p\in\mathbf{N}$，有

$$|R'_n(x)-R'_{n+p}(x)|<\varepsilon.$$

由于N与x无关，所以$R'_m(x)$一致收敛于零.

同样可证$R''_m(x)$一致收敛于零，从而$R_m(x)$一致收敛于零，即题给级数一致收敛.

例 8 若$f(x)$是以2π为周期的连续函数，且存在连续的一阶和二阶导数. 证明：$f(x)$的傅里叶级数一致收敛.

证 因为$f(x)$以2π为周期，所以$f'(x)$，$f''(x)$仍以2π为周期.

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\sin nx}{n\pi}f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$$=\frac{\cos nx}{n^2x}f'(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\cos nx\mathrm{d}x.$$

由 $f'(x)$ 及 $\cos nx$ 的周期性知，第一项等于零；又 $|f''(x)|<M$（闭区间上连续），故 $|a_m|<2M/n^2$. 同理，$|b_n|<2M/n^2$.

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的收敛性知，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛，依例 7 知，$f(x)$ 的傅里叶级数收敛，且一致收敛.

例 9 若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上囿变，证明：存在常数 $k>0$，$\forall$ 傅里叶系数 a_n,b_n，有 $|a_n|\leqslant k/n$，$|b_n|\leqslant k/n$.

证 若 $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 上只有有限个第一类间断点和有限个极值点，则称函数 $f(x)$ 囿变.

当 $f(x)$ 是正的囿变递增函数时，有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{f(x)}{\pi}\int_{\zeta}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{f(\pi)}{\pi}\cdot\frac{1}{n}(\sin n\pi-\sin n\zeta),$$

故 $|a_n|<\frac{|f(\pi)|}{n}$. 同理 $|b_n|<\frac{|f(\pi)|}{n}$.

由于 $f(x)$ 囿变，则 $f(x)$ 必可表示为两个非负单调增加函数之差（见疑难解析 2），即 $f(x)=F(x)-h(x)$. 于是

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[F(x)-h(x)]\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{F(\pi)}{\pi}\int_{\zeta}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x-\frac{h(\pi)}{\pi}\int_{\zeta}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x,$$

即
$$|a_n|<\left|\frac{F(\pi)}{n}\right|+\left|\frac{h(\pi)}{n}\right|.$$

同理
$$|b_n|<\left|\frac{F(\pi)}{n}\right|+\left|\frac{h(\pi)}{n}\right|.$$

故可以选出一个常数 k，使得 $n|a_n|\leqslant k$，$n|b_n|\leqslant k$，对一切 n 成立. 从而命题得证.

例 10 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，用傅里叶展开式证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证 因为$|\sin x|$有一个一致收敛的傅里叶展开式(见第一节例 11(1))

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{(2k)^2-1}\ (-\infty,+\infty),$$

所以 $$|\sin nx| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2knx}{(2k)^2-1}\ [-\pi,\pi].$$

若用有界函数乘以一致收敛级数的各项,则所得级数仍一致收敛. 而 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积,故$\exists\ M$,使得$\forall\ x\in[-\pi,\pi]$,有$|f(x)|\leqslant M$. 于是

$$f(x)\,|\sin nx| = \frac{2}{\pi}f(x) - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}f(x)\frac{\cos 2knx}{4k^2-1},\ [-\pi,\pi]$$

一致收敛. 逐项积分得

$$\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(x)\cos 2knx}{4k^2-1}\mathrm{d}x.$$

因为 $$\left|\int_a^b\frac{f(x)\cos 2knx}{4k^2-1}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M(b-a)}{4k^2-1},$$

而$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M(b-a)}{4k^2-1}$收敛,故$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b\frac{f(x)\cos 2knx}{4k^2-1}\mathrm{d}x$一致收敛.

取 $n\to\infty$的极限,并利用黎曼引理,得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{\int_a^b f(x)\cos 2knx\mathrm{d}x}{4k^2-1} = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

例 11 设 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上有连续导数,且 $f'(x)$ 在$[0,\pi]$上分段光滑,$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = 0$. 证明:$\int_0^\pi[f'(x)]^2\mathrm{d}x \geqslant \int_0^\pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$.

证 对 $f(x)$进行偶延拓,故 $a_0=0,b_n=0$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,\ x\in[0,\pi],$$

$$f'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}na_n\sin nx,\ x\in[0,\pi].$$

由巴塞瓦等式得

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2,$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[f'(x)]^2\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}n^2a_n^2\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_0^{\pi}[f'(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x.$$

例 12 设 $f(x)$是周期为 2π 的连续函数,证明:

(1) $F(x)=\dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h}f(t)\mathrm{d}t\ (h>0)$也是周期为 2π 的连续函数;

(2) $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ h>0$,使得在$[-\pi,\pi]$上,有$|f(x)-F(x)|<\varepsilon$.

(3) $\forall\ \varepsilon<0,\exists\ n$ 阶三角多项式 $\widetilde{S}_n(x)$,使得在$[-\pi,\pi]$上有$|f(x)-\widetilde{S}_n(x)|<2\varepsilon$.

证 设 $f(x)$的傅里叶级数为$\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$,则对傅里叶级数逐项积分后,得

$$\begin{aligned}F(x)&=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n\sin nh}{n}\cos nx+\frac{b_n\sin nh}{n}\sin nx\right].\end{aligned}$$

可以由此讨论所证命题.

下面给出另一种形式的但更直接的证明.

(1) 作代换 $t=x+y$,得

$$F(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(x+y)\mathrm{d}y,$$

则

$$\begin{aligned}F(x+2\pi)&=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(x+2\pi+y)\mathrm{d}y\ (f(x)\ \text{周期为}\ 2\pi)\\&=\frac{2}{2h}\int_{-h}^{h}f(x+y)\mathrm{d}y=F(x),\end{aligned}$$

故 $F(x)$是以 2π 为周期的连续函数.又

$$F(x)=\frac{1}{2h}\left[\int_0^{x+h}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{x-h}f(t)\mathrm{d}t\right],$$

由变上限函数性质与 $f(x)$ 的连续性知，$F(x)$ 也是连续函数.

（2）由积分中值定理，$\forall\ x\in[-\pi,\pi]$ 及 $h>0$，$\exists\ \xi_x\in[x-h,x+h]$，使得

$$F(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)\mathrm{d}t=f(\xi_x).$$

又由 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一致连续性，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得 $\forall\ x_1,x_2\in\mathbf{R}$，只要 $|x_1-x_2|<\delta$，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

取 $h\in(0,\delta)$，由 $|\xi_x-x|\leqslant h<\delta$，即得

$$|F(x)-f(x)|=|f(\xi_x)-f(x)|<\varepsilon\quad(|x|\leqslant\pi).$$

（3）因为 $F(x)$ 是变限积分函数，所以 $F(x)$ 连续可微，有

$$F'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\ (|x|\leqslant\pi),$$

所以 $F'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上二阶连续可导，$F(x)$ 的傅里叶级数一致收敛于 $F(x)$.

设 $F(x)$ 的傅里叶级数的部分和为 $\widetilde{S}_k(x)$，则当 $k\to\infty$ 时，$\forall\ x\in[-\pi,\pi]$，$\widetilde{S}_k(x)\rightrightarrows F(x)$. 于是，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ n\in\mathbf{N}$，使得

$$|F(x)-\widetilde{S}_n(x)|<\varepsilon\ (|x|\leqslant\pi).$$

故 $\forall\ \varepsilon>0$，先取定 h，使得 $|F(x)-f(x)|<\varepsilon$ 成立，再取定 $\widetilde{S}_n(x)$，使得 $|F(x)-\widetilde{S}_n(x)|<\varepsilon$ 成立. 由此两式即得

$$\begin{aligned}|f(x)-\widetilde{S}_n(x)|&\leqslant|f(x)-F(x)|+|F(x)-\widetilde{S}_n(x)|\\&<2\varepsilon\ (|x|\leqslant\pi).\end{aligned}$$

连续函数的傅里叶级数可以在一些点上发散，所以不一定收敛，更不一定一致收敛. 但是连续的周期函数却总可用三角多项式一致逼近.

关于傅里叶级数的应用与傅里叶级数的复数形式，本书将不予讨论.

第十章　多元函数微分学

本章先讨论多元实值函数的微分学，而把向量函数的微分学放在第十二章单独进行讨论.

第一节　平面点集与多元函数

主要内容

一、平面点集

1. 坐标平面上满足某种条件 P 的点的集合称为平面点集，记作 $E=\{(x,y)\mid(x,y)$满足条件 $P\}$.

平面点集$\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$称为以点 $A(x_0,y_0)$为中心的 δ 圆邻域，$\{(x,y)\mid|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta\}$称为以点$A(x_0,y_0)$为中心的 δ 方邻域. 并且以记号$U(A;\delta)$或$U(A)$不加区分地表示这两种邻域. $U^\circ(A;\delta)$或$U^\circ(A)$表示点 A 的去心邻域.

2. 任意点 $A\in\mathbf{R}^2$ 与任意点集 $E\subset\mathbf{R}^2$ 的关系

若存在点 A 的某邻域$U(A)$，使得$U(A)\subset E$，且称 A 为点集 E 的内点；E 的全体内点构成 E 的内部，记作 $\mathrm{int}E$.

若存在点 A 的某邻域$U(A)$，使得$U(A)\cap E=\varnothing$，则称 A 为点集 E 的外点.

若在点 A 的任何邻域内既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点，则称 A 是集合 E 的边界点.

$E^C=\mathbf{R}^2\backslash E$ 是 E 关于 $\mathbf{R}^2$ 的余集；E 的边界点的全体构成 E 的

边界，记作 ∂E.

3. 点 A 与数集 E 中点的关系

若在 A 任一邻域 $U^{\circ}(A)$ 内均含有 E 中的点，则称 A 是 E 的聚点. 聚点可以属于 E，也可以不属于 E.

若点 $A\in E$，但不是 E 的聚点，则称 A 是 E 的孤立点.

4. 一些重要的平面点集

若平面点集 E 的每一点都是 E 的内点，则称为 E 为开集.

若平面点集 E 的所有聚点都属于 E，则称为 E 为闭集. 若 E 没有聚点，E 也称为闭集.

$\mathbf{R}^2$ 与 $\varnothing$ 是既开又闭的点集.

连通(即 E 中任意两点可以用一条完全在 E 内的折线相连接)的开集 E 称为开域.

开域及其边界构成的点集称为闭域.

开域、闭域或者开域及其部分边界点构成的点集统称为区域.

5. 点集的有界性

对于平面点集 E，若存在原点的某邻域 $U(0,r)$，使得 $E\subset U(0,r)$ $(r>0)$，则称 E 是有界点集. 否则，称 E 是无界点集.

E 也可以表示为：存在矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]\supset E$. 或者用点集的直径 $d(E)=\sup\limits_{P_1,P_2\in E}\rho(P_1,P_2)$ 来讨论：当且仅当 $d(E)$ 为有限值时，E 是有界点集. 其中

$$\rho(P_1,P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

对 $\mathbf{R}^2$ 平面上任何三点 P_1,P_2,P_3，下式成立：

$$\rho(P_1,P_2)\leqslant\rho(P_1,P_3)+\rho(P_2,P_3).$$

二、$\mathbf{R}^2$ 上的完备性定理

1. 设 $\{P_n\}\subset\mathbf{R}^2$ 为平面点列，P_0 为 $\mathbf{R}^2$ 定点. 若 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，使得当 $n>N$ 时，有 $P_n\in U(P_0)$，则称点列 $\{P_n\}$ 收敛于 P_0，记作

$$\lim_{n\to\infty}P_n=P_0 \quad 或 \quad P_n\to P_0,\ n\to\infty.$$

2. 柯西收敛准则　平面点列 $\{P_n\}$ 收敛的充要条件是：$\forall\ \varepsilon>$

0,$\exists\ N\in\mathbf{N}$,使得当 $n>N$ 时,$\forall\ P\in\mathbf{N}$,总有 $\rho(P_n,P_{n+p})<\varepsilon$.

3. 闭域套定理　设$\{D_n\}$是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭域列,满足:$D_n\supset D_{n+1}$,$n=1,2,\cdots$;$d_n=d(D_n)$,$\lim\limits_{n\to\infty}d_n=0$,则存在惟一的点 $P_0\in D_n$, $n=1,2,\cdots$.

4. 聚点定理　设 $E\subset\mathbf{R}^2$ 为有界无限点集,则 E 在 $\mathbf{R}^2$ 中至少有一个聚点.

5. 有限覆盖定理　设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 为有界闭域,$\{\Delta_\alpha\}$为一开域族,覆盖了 D(即 $D\subset\bigcup\limits_\alpha\Delta_\alpha$),则在$\{\Delta_\alpha\}$中必存在有限个开域 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_m$,它们也覆盖了 D(即 $D\bigcup\limits_{i=1}^{m}\Delta_i$).

三、二元函数与 n 元函数

1. 设平面点集 $D\subset\mathbf{R}^2$,若按某对应法则 f,D 中每一点$P(x,y)$都有惟一确定的实数 Z 与之对应,则称 f 为定义在 D 上的二元函数(或称 f 为 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射),记作 $f:D\to\mathbf{R}$,$P\mapsto Z$.

若二元函数的值域为有界数集,则该函数称为有界函数.

2. n 个有序实数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全体称为 n 维向量空间(或 n 维空间),记作 $\mathbf{R}^n$. 任一有序实数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为 $\mathbf{R}^n$ 的一个点;n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是该点的坐标.

设 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的点集,若按某对应法则 f,使得 E 中每一点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$都有惟一的一个实数与之对应,则称 f 为定义在 E 上的 n 元函数(或称 f 为 $E\subset\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射),记作 $f:E\to\mathbf{R}$,$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto y$ 或 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E$.

疑 难 解 析

1. 内点、外点、边界点、聚点及孤立点与数集 E 有何关系?

答　E 的内点一定属于 E;E 的外点一定不属于 E;E 的边界点可能属于 E,也可能不属于 E;聚点可能属于 E,也可能不属于 E;孤立点一定属于 E.

它们之间还存在这样的关系:孤立点一定是界点;内点与非孤立的界点一定是聚点;既不是聚点又不是孤立点的点一定是外点.

2. $\mathbf{R}^2$ 上的完备性定理与实数系的完备性定理有什么联系?

答 $\mathbf{R}^2$ 上的完备性定理是实数系的完备性定理的推广,它们同样是二元函数极限理论的基础.

这些定理的证明方法与实数系的完备性定理的证明方法完全相同,仅需将闭区间换成闭区域.因此,本章不多讨论.

方法、技巧与典型例题分析

本节讨论两个问题:一是平面区域问题与 $\mathbf{R}^2$ 上的完备性定理.通过概念来认识实际问题,区分实际的平面区域是哪类区域,并进行讨论.这需要读者对概念有清晰的认识,能运用概念辨析实际问题.二是函数的基本概念,即函数式、函数值、函数定义域及其点集形式的讨论与确定.可以利用讨论一元函数的技巧与方法来讨论二元与 n 元函数的同类问题.

例 1 证明:邻域是开集.

证 设邻域为 $U(a)$,A 为 $U(a)$上任一点,则 $|A-a|<\delta$.因此,存在正数 h,使得 $|A-a|<\delta-h$.故 $\forall\ x\in U(A;h)$,以下不等式成立:

$$|x-a|\leqslant|x-A|+|A-a|<\delta.$$

所以,$x\in U(a)$,即 A 是 $U(a)$的内点.依定义知,$U(a)$为开集.

例 2 证明:E 为闭集的充分必要条件是 E^{C} 是开集.

证 **必要性** 若 E 为闭集,则因为 E 的一切聚点都属于 E,从而 $\forall\ x\in E^{\mathrm{C}}$,$x$ 不是 E 的聚点.即存在 $U(x)$,使得 $U(x)\cap E=\varnothing$,也就是 $U(x)\subset E^{\mathrm{C}}$.故 E^{C} 是开集.

充分性 $\forall$ 任 $x\in E^{\mathrm{C}}$,因为 E^{C} 是开集,所以 $\exists\ U(x)\in E^{\mathrm{C}}$,即 x 不是 E 的聚点.故若 E 有聚点,则聚点必属于 E.

类似可证:E 为开集的充分必要条件是 E^{C} 是闭集.

例 3 证明：

(1) 任意一组开集$\{E_\alpha\}$的并集$(\bigcup_\alpha E_\alpha)$是开集；

(2) 任意一组闭集$\{E_\alpha\}$的交集$(\bigcap_\alpha E_\alpha)$是闭集；

(3) 任意有限个开集$E_1,E_2,\cdots,E_m$的交集$(\bigcap_{i=1}^m E_i)$是开集；

(4) 任意有限个闭集$E_1,E_2,\cdots,E_m$的并集$(\bigcup_{i=1}^m E_i)$是闭集.

证 要用到德・摩根(De-Morgan)公式：设$\{E_\alpha\}$是若干(有限或无限多个)$\mathbf{R}^k(k=2,3,\cdots,n)$中子集$E_\alpha$的一组，则成立

$$(\bigcup_\alpha E_\alpha)^C=(\bigcap_\alpha E_\alpha{}^C);\quad (\bigcap_\alpha E_\alpha)^C=(\bigcup_\alpha E_\alpha{}^C).$$

其证明见上册第一章.

(1) 若$x\in(\bigcup_\alpha E_\alpha)$，则存在某个$\alpha$，使得$x\in E_\alpha$. 而$E_\alpha$是开集，故$x$是$E_\alpha$的内点，即$(\bigcup_\alpha E_\alpha)$的内点，从而$(\bigcup_\alpha E_\alpha)$是开集.

(2) 依德・摩根公式，$(\bigcap_\alpha E_\alpha)^C=(\bigcup_\alpha E_\alpha{}^C)$. 由于$E_\alpha$是闭集，故$E_\alpha^C$是开集. 由题(1)知，$(\bigcup_\alpha E_\alpha{}^C)$是开集，即$(\bigcap_\alpha E_\alpha)^C$是开集，从而$(\bigcap_\alpha E_\alpha)$是闭集.

(3) 若$x\in(\bigcap_{i=1}^m E_i)$，则$x\in$某$E_i$，故存在$U(x;\delta_i)$，使得$U(x;\delta_i)\subset E_\alpha$. 可以取$\delta=\min\limits_{0\leqslant i\leqslant m}(\delta_i)$，则对任一$i$ $(i=1,2,\cdots,m)$，$U(x;\delta)$成立，从而x是$(\bigcap_{i=1}^m E_i)$的内点，即$(\bigcap_{i=1}^m E_i)$是开集.

(4) 类似题(2)的证法，利用德・摩根公式和余集概念，由题(3)的结论即可得出. 请读者自己写出证明过程.

但是，任意个开集的交集不一定是开集，任意个闭集的和集不一定是闭集.

例 4 求下列各集的导集(所有聚点构成的集合)，并说明它是否闭集.

(1) $E=\{(x,y)\mid x^2+y^2>2\}$；

(2) $E=\{(1/m,1/n)\mid m,n\in\mathbf{N}\}$；

(3) $E=\{(x,y)\mid x,y$ 为整数$\}$;

(4) $E=\{(x,y)\mid x,y$ 为有理数$\}$.

解 (1) 导集 $E'=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 2\}$,$E$ 是开集,E' 是闭集.

(2) 导集 $E'=\{(0,0)\}$,E 不是闭集.

(3) 导集 $E'=\varnothing$,E 是闭集.

(4) 导集 $E'=\mathbf{R}^2$,E 不是闭集.

例 5 下列集合是开集还是闭集?求出它们的内部(int)和边界,并确定是什么区域.

(1) $E=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1\}$;

(2) $E=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid y<x^2\}$;

(3) $E=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid -1<x<1,y=0\}$.

解 (1) E 是闭集.

$$\mathrm{int}E=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x>0,y>0,x+y<1\}.$$

$$\partial E=\{(x,y)\mid x=0,0\leqslant y\leqslant 1\}\cup\{(x,y)\mid y=0,0\leqslant x\leqslant 1\},$$
$$\cup\{(x,y)\mid x+y=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\},$$

E 是有界闭区域.

(2) E 是开集. $\mathrm{int}E=E$,$\partial E=\{(x,y)\mid y=x^2\}$. E 是无界开区域.

(3) E 既不是开集又不是闭集. $\mathrm{int}E=\varnothing$. $\partial E=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,y=0\}$. E 不是区域.

例 6 画出下列平面区域,并指出它是什么样的区域.

(1) $\{(x,y)\mid x^2>y\}$;　　(2) $\{(x,y)\mid x^2-y^2\leqslant 1\}$;

(3) $\{(x,y)\mid |xy|\leqslant 1\}$;　　(4) $\{(x,y)\mid |x|+y\leqslant 1\}$.

解 (1) 如图 10.1(a)所示是开区域,无界区域.

(2) 如图 10.1(b)所示是闭区域,无界区域.

(3) 如图 10.2(a)所示是闭区域,无界区域.

(4) 如图 10.2(b)所示是闭区域,无界区域.

例 7 画出下列空间区间,并指出它们各是什么区域.

(1) $V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 9\}$;

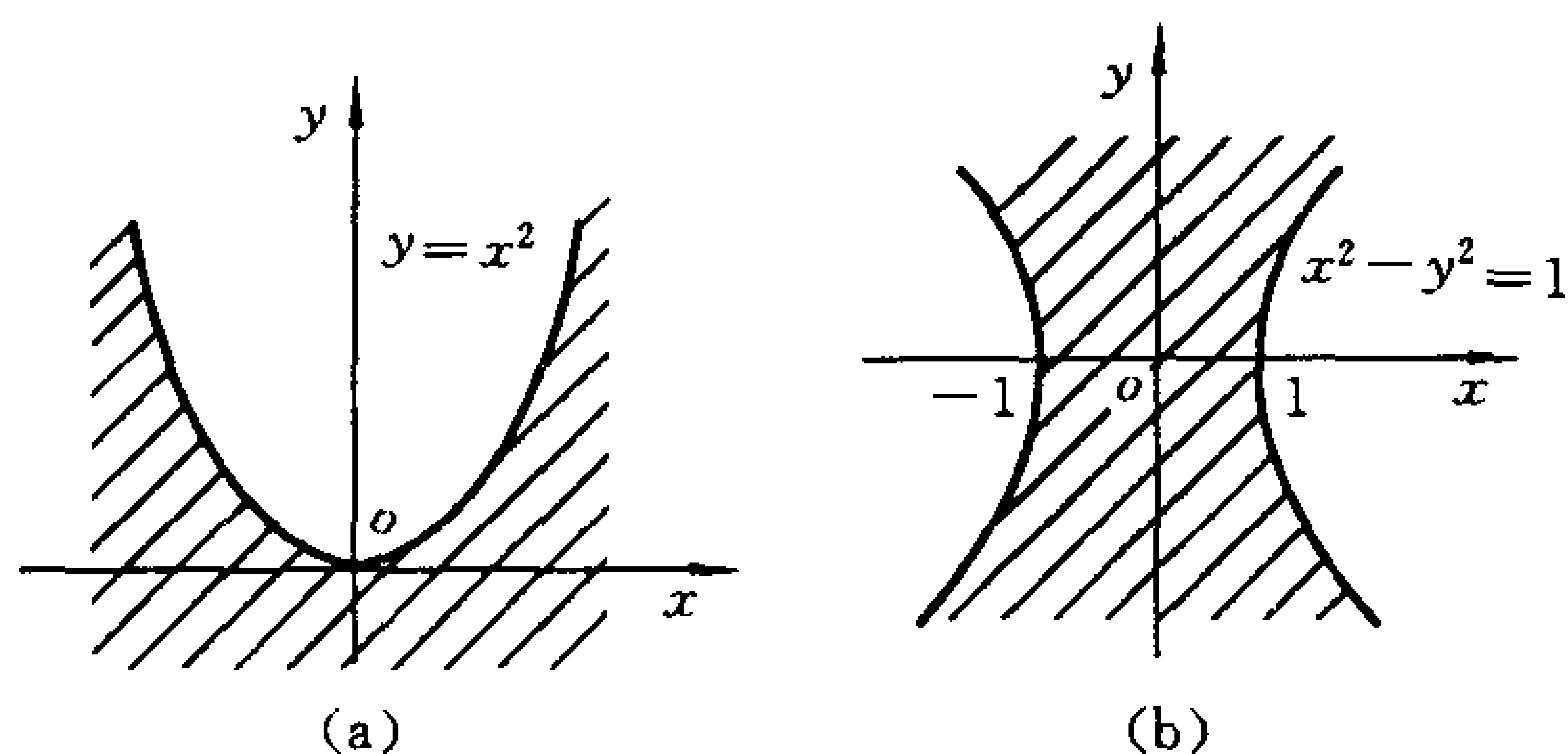


图 10.1

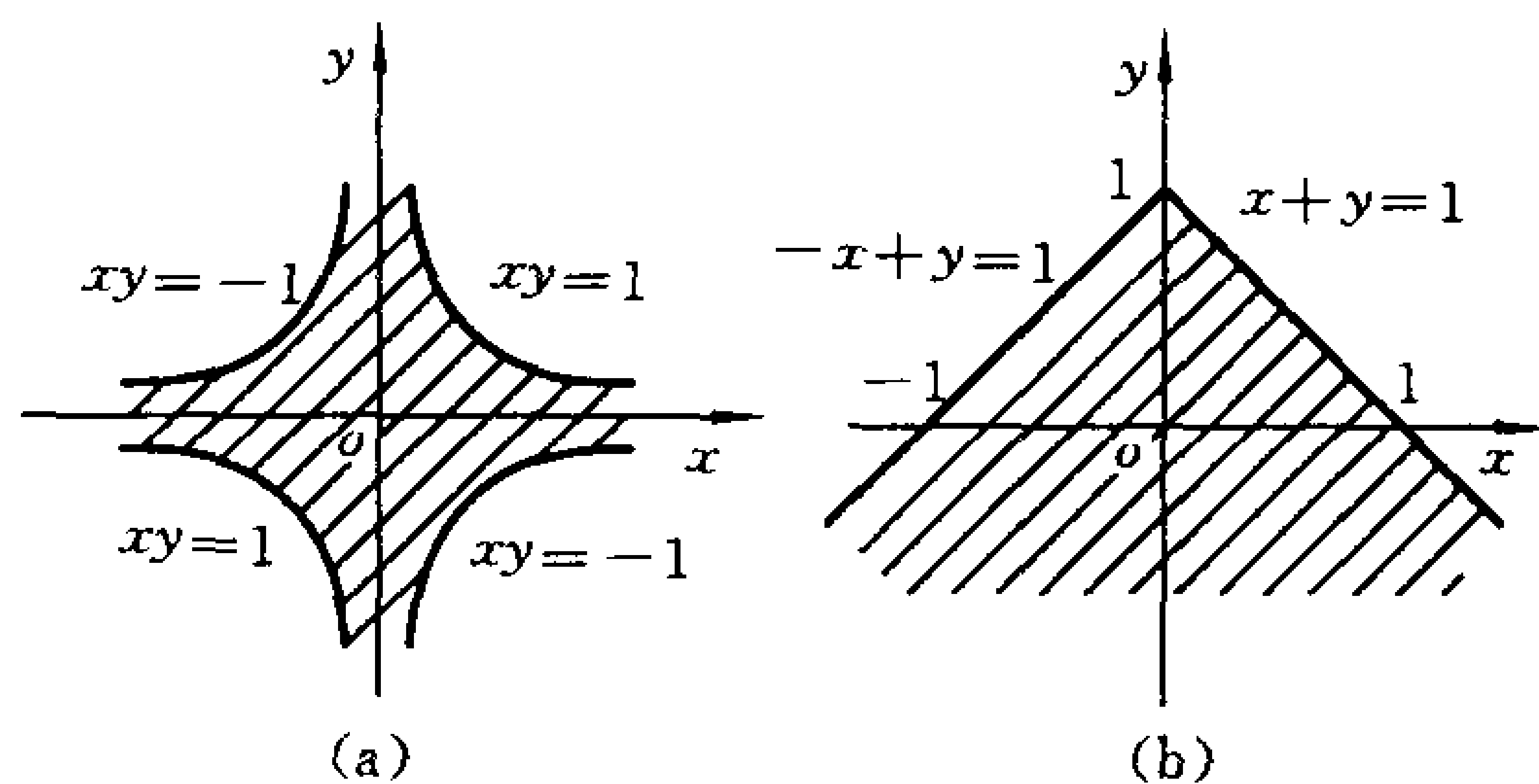


图 10.2

(2) $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\leqslant a^2,|z|\leqslant b\}$;

(3) $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2<z,z<2\}$;

(4) $V=\{(x,y,z)\,|\,|x|+|y|+|z|\leqslant 1\}$.

解 (1) 是以原点为中心、半径等于 3 的球体,是闭区域,如图 10.3(a)所示.

(2) 是以 z 轴为中心轴、半径等于 a、高为 $2b$ 的圆柱体,是闭区域,如图 10.3(b)所示.

(3) 是以原点为顶点、z 轴为中心轴、开口向上的旋转抛物面 $x^2+y^2=z$ 与平面 $z=2$ 所围立体的内部,是开区域,如图 10.4(a)所示.

(4) 是以原点中心、八个平面所围成的八面体区域,是闭区域,如图 10.4(b)所示.

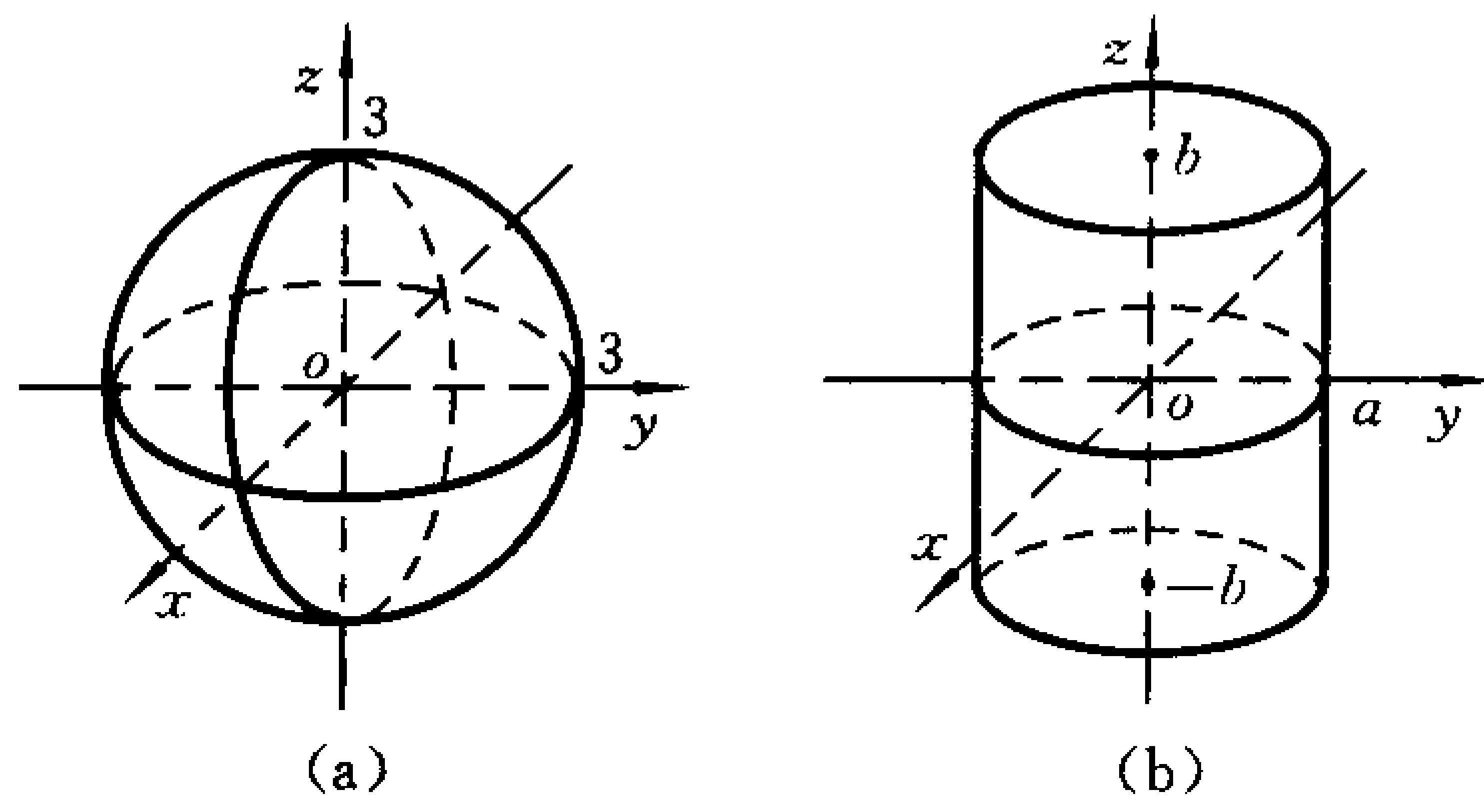


图 10.3

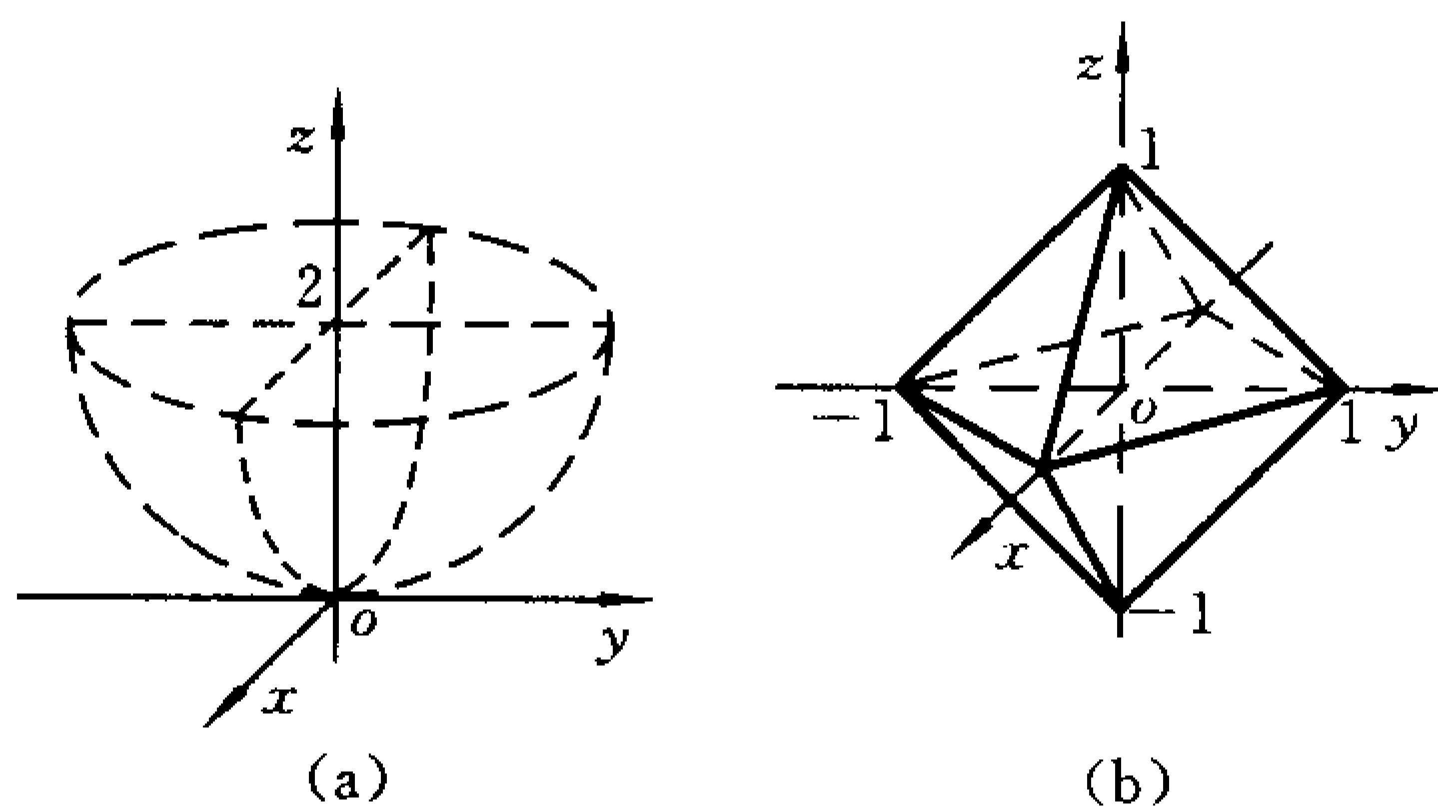


图 10.4

例 8 证明：点 P 是 E 的聚点的充分必要条件是：$\forall\ \delta>0$，$U^\circ(P;\delta)\cap E\neq\varnothing$.

证 **必要性** 若 P 是 E 的聚点，则 $\forall\ \delta>0$，$U(P;\delta)$ 内有 E 的无限多个点，故 $U^\circ(P;\delta)\cap E\neq\varnothing$.

充分性 若 $\forall\ n\in\mathbf{N}$，$U^\circ(P;1/n)\cap E\neq\varnothing$，即 $\exists\ P_n\in U^\circ(P;1/n)\cap E$. 这样，$\forall\ \delta>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，使得当 $\delta>1/N$ 时，有 $U^\circ(P;1/N)\subset U^\circ(P;\delta)$. 于是，$\forall\ n>N$，有无限多个 $P_n\in E$，使得 $P_n\in U^\circ(P;\delta)$，故 P 是 E 的聚点.

例 9 利用闭区域套定理证明：三角形的中线交于一点.

证 记带边界三角形为$\triangle ABC$，它是一个闭集.

如图 10.5 所示，$\triangle ABC$ 的三中线包含在$\triangle ABC$ 内，三中点又构成$\triangle A_1B_1C_1$，有$\triangle A_1B_1C_1\subset\triangle ABC$.

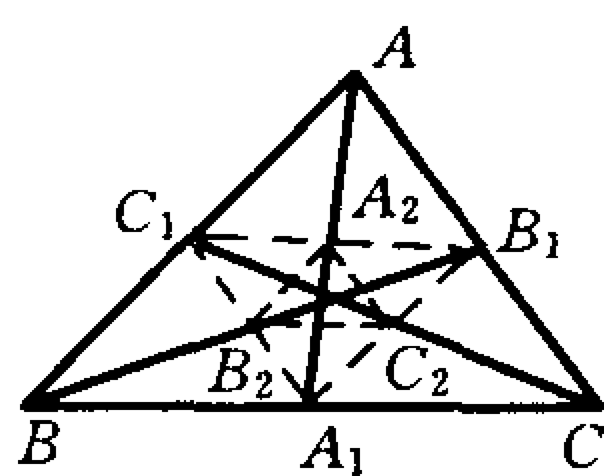


图 10.5

$\triangle ABC$ 三中线的一部分恰为$\triangle A_1B_1C_1$ 的三中线，且$\triangle ABC$ 三中线两两的交点也是$\triangle A_1B_1C_1$ 三中线两两的交点. $\triangle A_1B_1C_1$ 的三中点又构成$\triangle A_2B_2C_2$，有$\triangle A_2B_2C_2\subset\triangle A_1B_1C_1$. $\triangle A_1B_1C_1$ 的三中线恰为$\triangle A_2B_2C_2$ 的三中线. 如此继续，得一闭三角形区域套

$$\triangle ABC\supset\triangle A_1B_1C_1\supset\triangle A_2B_2C_2\supset\cdots,$$

且有$\lim\limits_{n\to\infty}d_n=0$. 因此，存在惟一的点 o 属于闭三角形区间套，点 o 即三角形三中线的交点.

例 10 证明有限覆盖定理：设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 为一有界闭区域，$\{\Delta_\alpha\}$ 为一开域族，它覆盖 D(即 $D\subset\bigcup\limits_{\alpha}\Delta_\alpha$)，则在$\{\Delta_\alpha\}$中必存在有限个开域 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_m$，它们同样覆盖了 D(即 $D\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m}\Delta_i$).

证 (仿照实数系的有限覆盖定理的证明)用反证法. 设在$\{\Delta_\alpha\}$中不存在有限个开域 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_m$ 可以覆盖 D. 将 D 等分为四个子域时，其中至少有一个子域不能被$\{\Delta_\alpha\}$中有限个子域所覆盖，记此子域为 D_1，且 $d(D_1)=\dfrac{1}{2}d(D)$.

再将 D_1 等分为四个子域. 同样地，其中至少有一个子域不能被$\{\Delta_\alpha\}$中有限个开域所覆盖，记此子域为 D_2，且 $d(D_2)=\dfrac{1}{2^2}d(D)$.

如此继续，则得到一个闭区域列$\{D_n\}(n=1,2,\cdots)$，有

$$D\supset D_1\supset D_2\supset\cdots,\quad 即\quad D_n\supset D_{n+1},\ n=1,2,\cdots,$$

$$d(D_n)=\frac{1}{2^n}d(D)\xrightarrow{n\to 0}0.$$

每一个闭域 D_n 都不能用$\{\Delta_\alpha\}$中有限个开域来覆盖. 依闭区域套定理，存在惟一的点 $P\in D_n$, $n=1,2,\cdots$. 但 P 必含于$\{\Delta_\alpha\}$的某一个开域 Δ 内，当 n 充分大时，有 $D_n\subset\Delta$. 此式说明，$\{\Delta_\alpha\}$中的一个开域 Δ 即可覆盖 D_n，从而与假设下推出的 D_n“不能被$\{\Delta_\alpha\}$中有限个开域来覆盖”相矛盾. 可见，假设是错误的，即在$\{\Delta_\alpha\}$中必存在有限个

开域 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_m$，它们同样覆盖了 D.

例 11 求下列平面点列的极限：

(1) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n},\dfrac{n}{n-1}\right\}$；　　(2) $\left\{\dfrac{n^2+1}{n^2-n+1},\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n-1}=1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{n},\frac{n}{n-1}\right\}=(0,1).$$

(2) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2-n+1}=1,\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^2+1}{n^2-n+1},\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}=(1,\mathrm{e}).$$

这里用到了点列收敛的充要条件(见例 12).

例 12 证明：点列 $\{P_n(x_n,y_n)\}$ 收敛于 $P_0(x_0,y_0)$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$.

证 **必要性** 因为 $\forall\ n\in\mathbf{N}$，恒有

$$|x_n-x_0|<\rho(P_n,P_0)<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. 同理可证，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$.

充分性 设 $\forall\ n\in\mathbf{N}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$，则 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N_1\in\mathbf{N}$，使得当 $k>N_1$ 时，$|x_k-x_0|<\varepsilon/\sqrt{2}$；同样，$\exists\ N_2\in\mathbf{N}$，使得当 $k>N_2$ 时，$|y_k-y_0|<\varepsilon/\sqrt{2}$. 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $k>N$ 时，恒有

$$|x_k-x_0|<\varepsilon/\sqrt{2},\quad |y_k-y_0|<\varepsilon/\sqrt{2},$$

于是，$\forall\ k>N$，有 $\rho(P_k,P_0)<\varepsilon$. 即

$$\lim_{n\to\infty}\{P_n(x_n,y_n)\}=P_0(x_0,y_0).$$

例 13 求下列函数的表达式：

(1) $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$，求 $f(1,\dfrac{y}{x})$；

(2) $f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\ (x>0)$，求 $f(x)$；

(3) $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$，且当 $y=1$ 时 $z=x$，求函数 f,z；

(4) $z=x+y+f(x-y)$，且当 $y=0$ 时 $z=x^2$，求函数 f,z.

解 求函数表达式的方法与一元函数同类题的解法一样，读者可参看上册中的有关说明.

(1) $f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{2\cdot 1\cdot y/x}{1+(y/x)^2}=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=f(x,y)$.

(2) 因为 $f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x^2}}=\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$，所以

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}.$$

(3) 因为当 $y=1$ 时，$z=x$，所以

$$\begin{aligned}f(\sqrt{x}-1)&=z-\sqrt{y}\xlongequal{y=1}x-1\\&=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)\\&=(\sqrt{x}-1)[(\sqrt{x}-1)+2].\end{aligned}$$

于是 $$f(t)=t(t+2)=t^2+2t,$$

$$z=\sqrt{y}+x-1\ (\text{利用}\ f(\sqrt{x}-1)=x-1).$$

(4) 因为当 $y=0$ 时，$z=x^2$，所以，$x^2=x+f(x)$，即 $f(x)=x^2-x$. 则

$$z=x+y+(x-y)^2-(x-y)=2y+(x-y)^2.$$

例 14 求下列函数的函数值：

(1) $f(x,y)=\left[\dfrac{\arctan(x+y)}{\arctan(x-y)}\right]^2$，求 $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$；

(2) $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan(x/y)$，求 $f(tx,ty)$.

解 代入运算即可.

(1) 因为 $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}=1$，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

故 $$f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{\pi/4}{\pi/3}\right)^3=\frac{27}{64}.$$

(2) $$\begin{aligned}f(tx,ty)&=(tx)^2+(ty)^2-xyt^2\tan(x/y)\\&=t^2[x^2+y^2-xy\tan(x/y)]=t^2f(x,y).\end{aligned}$$

例 15 求下列函数的定义域：

(1) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$；

(2) $f(x,y)=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$；

(3) $f(x,y,z)=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}$

$$+\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2-y^2-z^2}}(R>r)；$$

(4) $f(x,y)=\arcsin(x/y^2)+\arcsin(1-y)$.

解 一般需通过解不等式组确定.

(1) $\begin{cases}1-x^2\geqslant 0,\\ y^2-1\geqslant 0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|\leqslant 1,\\ |y|\geqslant 1.\end{cases}$定义域如图 10.6(a)所示.

(2) $\sin(x^2+y^2)\geqslant 0\Rightarrow 2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi, k=0,1,2,\cdots$. 定义域如图 10.6(b)所示.

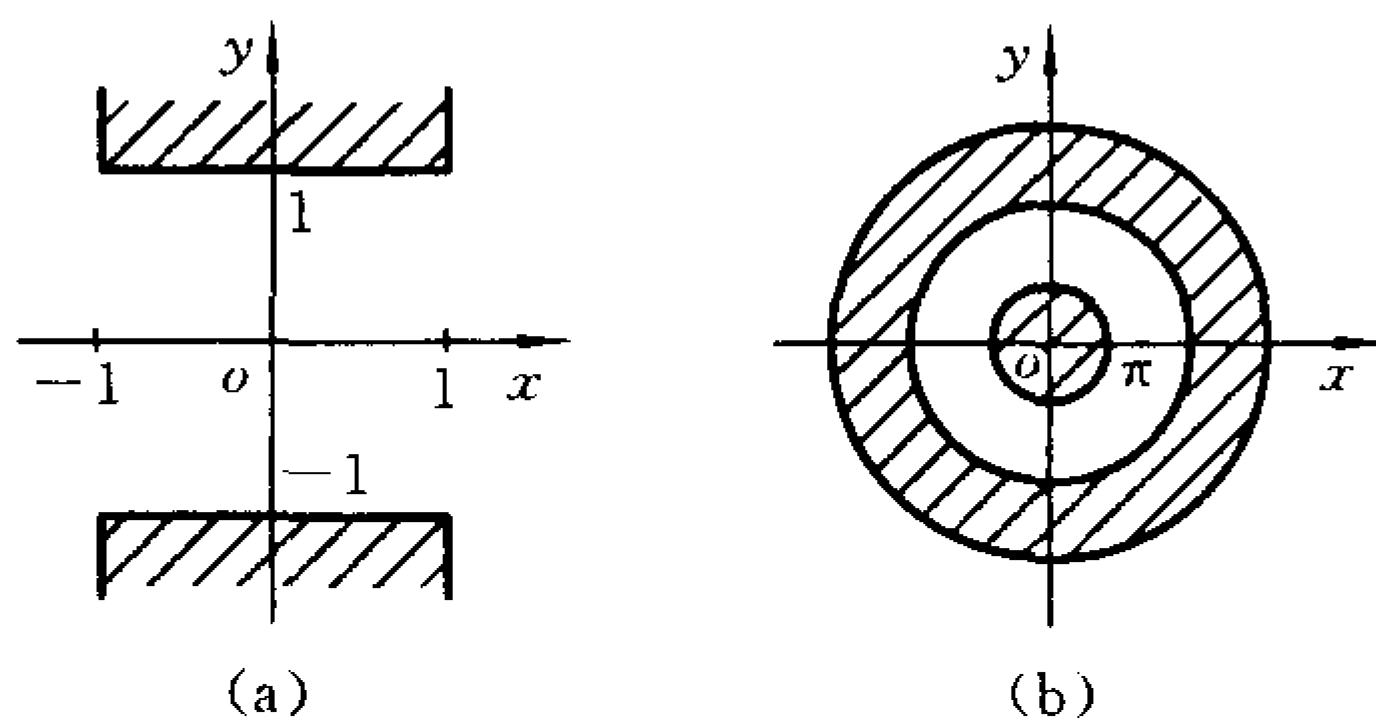


图 10.6

(3) $r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$，是两个球体所围区域. 定义域如图 10.7(a)所示.

(4) $\begin{cases}|x/y^2|\leqslant 1,\\ |1-y|\leqslant 1\end{cases}(y\neq 0)\Rightarrow\begin{cases}y^2\geqslant x,\\ 0<y\leqslant 2,\end{cases}$和$\begin{cases}y^2\geqslant -x,\\ 0<y\leqslant 2.\end{cases}$

定义域如图 10.7(b)所示.

例 16 求下列函数的定义域：

(1) $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$；　　(2) $z=\arccos\dfrac{x}{x+y}$；

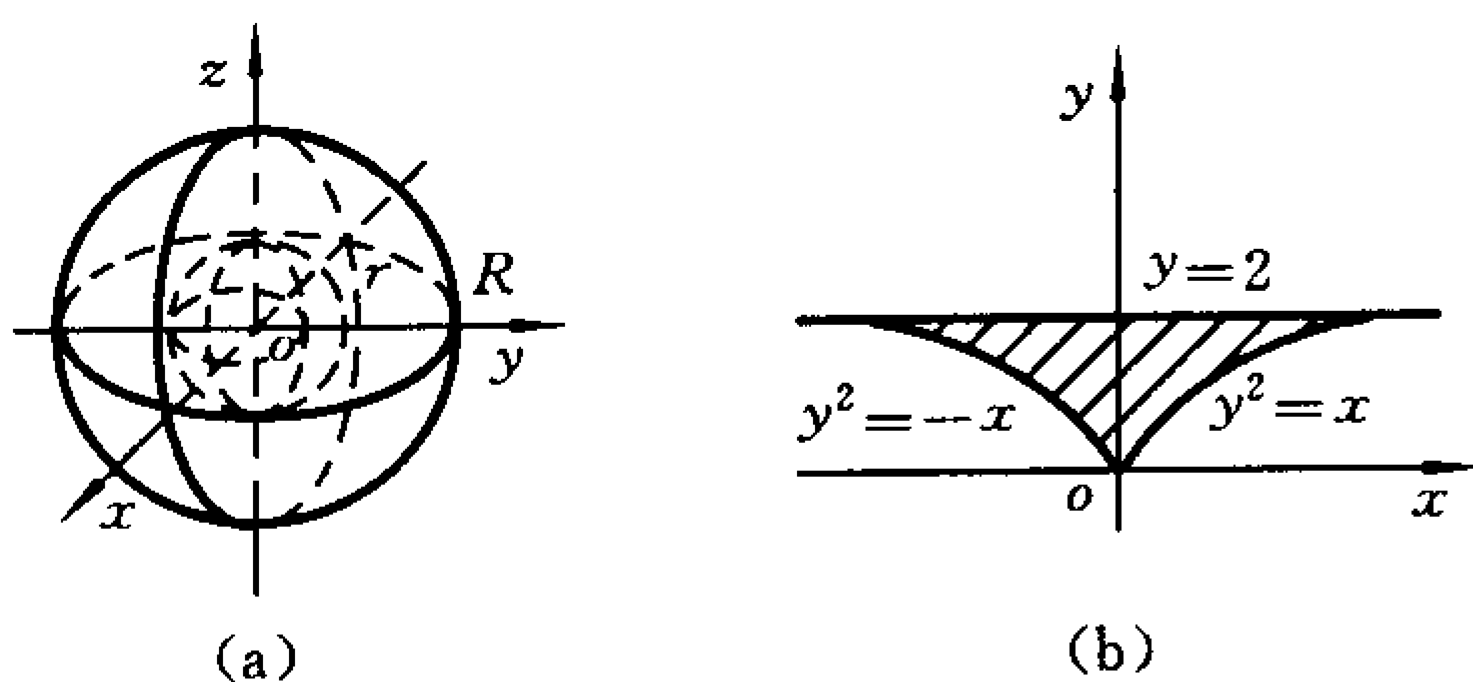


图 10.7

(2) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　(4) $u=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$.

解　(1) $\begin{cases}x\leqslant x^2+y^2,\\x^2+y^2<2x,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-1/2)^2+y^2\geqslant(1/2)^2,\\(x-1)^2+y^2<1,\end{cases}$

定义域是一月牙形区域，如图 10.8(a)所示.

(2) $\left|\dfrac{x}{x+y}\right|\leqslant1\Rightarrow|x|\leqslant|x+y|$ $(x\neq-y)$，即

$$x^2\leqslant x^2+2xy+y^2\quad\text{或}\quad y(y+2x)\geqslant0.$$

$$\begin{cases}y\geqslant0,\\y\geqslant-2x,\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}y\leqslant0,\\y\leqslant-2x,\end{cases}(x,y\text{ 不同时为零}).$$

定义域如图 10.8(b)所示.

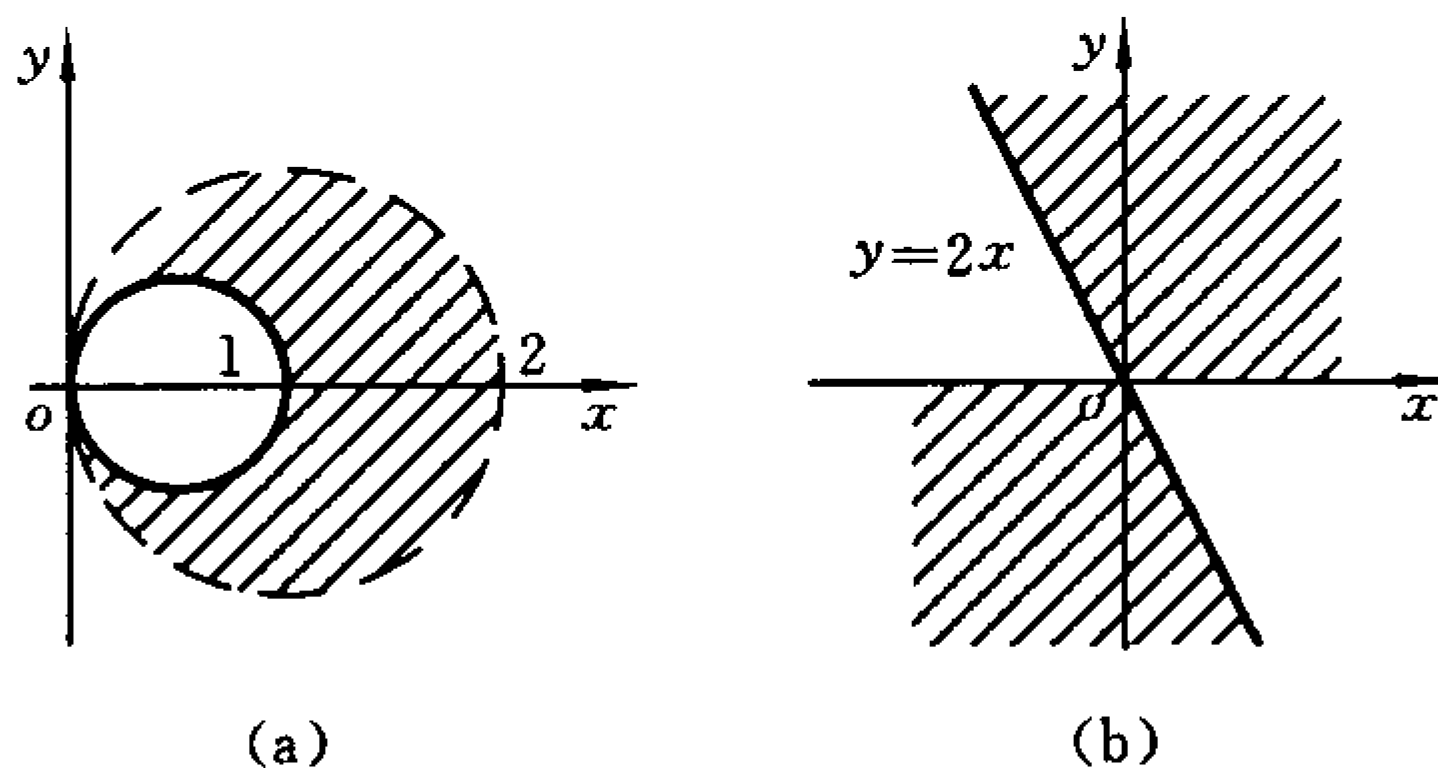
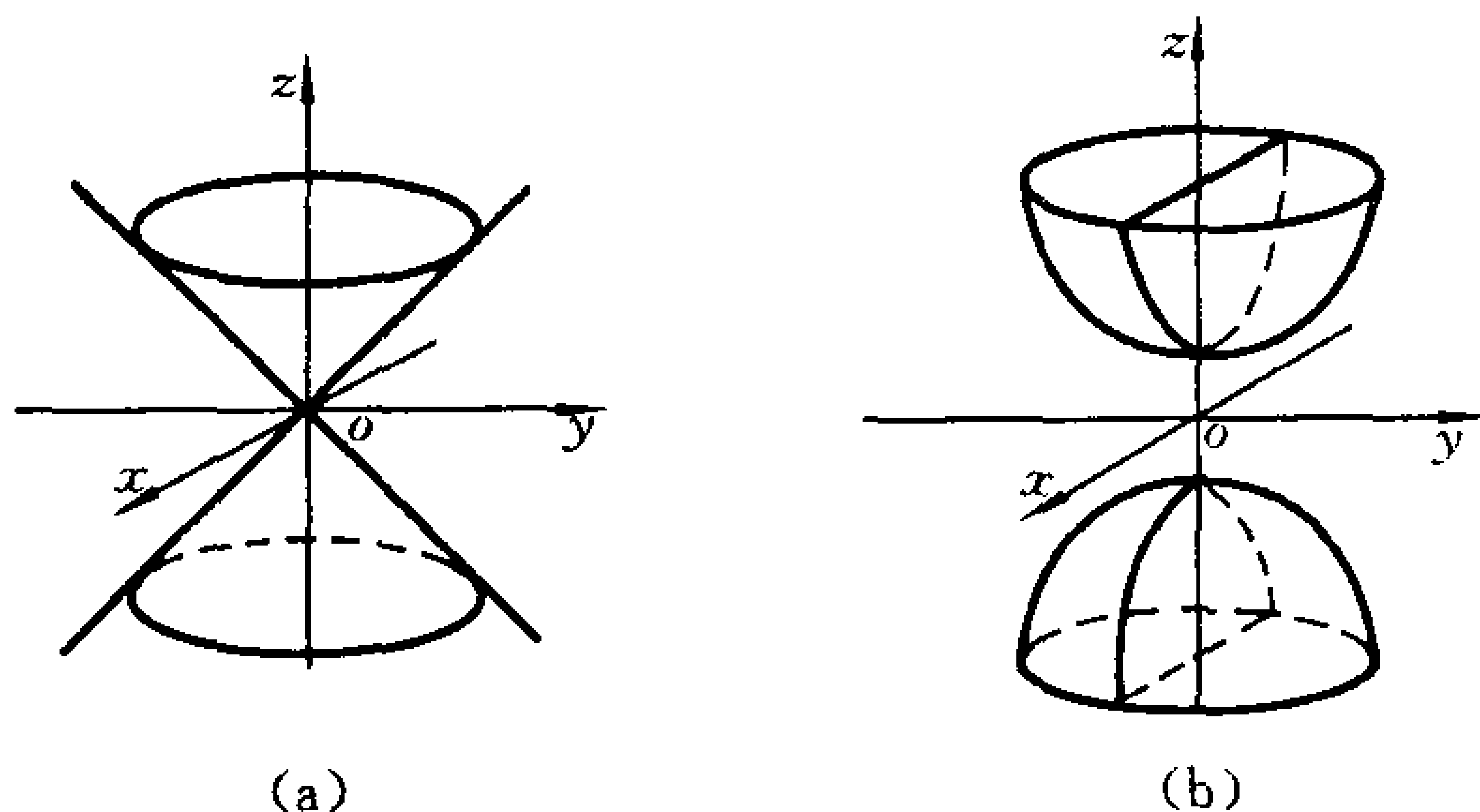


图 10.8

(3) $\left|\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant1\Rightarrow x^2+y^2-z^2\geqslant0$，定义域是圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的外部，如图 10.9(a)所示.

(4) $-x^2-y^2+z^2-1>0 \Rightarrow x^2+y^2-z^2<1$，定义域是双叶双曲面内部，如图 10.9(b)所示.



(a)　　　　(b)

图 10.9

第二节　二元函数的极限与连续性

主要内容

一、二元函数的极限

1. 设 f 为定义在 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上的二元函数，P_0 为 D 的一个聚点，A 为确定的实数. 若 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得当 $P\in U^\circ(P_0;\delta)\cap D$ 时，恒有 $|f(P)-A|<\varepsilon$，则称 f 在 D 上当 $P\to P_0$ 时，以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=A$ 或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$.

2. $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=A$ 的充要条件是：$\forall$ 任 $E\subset D$，只要 P_0 是 E 的聚点.

推论 1　设 $E_1\subset D$，P_0 是 E_1 的聚点，若 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$ 不存在，则 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}}f(P)$ 也不存在.

推论 2　设 $E_1,E_2\subset D$，P_0 是它们的聚点，若存在极限：$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in E_1}}f(P)=A_1$，$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in E_2}}f(P)=A_2$，但 $A_1\neq A_2$，则 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in E_1}}f(P)$ 不存在.

推论 3　极限 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$ 存在 $\Leftrightarrow$ 对于 D 中任一满足条件 $P_n\neq P_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$ 的点列 $\{P_n\}$，它所对应的函数列 $\{f(P_n)\}$ 都收敛.

3. 设 f 为定义在 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上的二元函数，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的一个聚点. 若 $\forall$ 任 $M>0$，$\exists\ U(P_0;\delta)$，使得 $\forall\ P(x,y)\in U^\circ(P_0;\delta)$，有 $f(P)>M$，则称 f 在 D 上当 $P\to P_0$ 时存在非正常极限 $+\infty$，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=+\infty \quad \text{或} \quad \lim_{P\to P_0}f(P)=+\infty.$$

类似可定义 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=-\infty$ 与 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=\infty$.

4. x,y 依一定顺序先后趋向于 x_0,y_0 时 f 的极限称为累次极限. 而前面的极限称为二重极限.

设 f 是定义在 $D\subset\mathbf{R}^2$ 的二元函数，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的一个聚点. 如果对于每个 $y\neq y_0$，极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 存在，且极限

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)$$

存在，则称此极限值为函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 先对 x 后对 y 的二次极限.

同理可得函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 先对 y 后对 x 的二次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$.

5. 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 与累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$（或 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$），则它们必然相等.

(1) 若累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 存在但不相等，则二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 必不存在.

(2) 若累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 以及二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 都存在，则三者相等.

二、二元函数的连续性

1. 设 f 为定义在点集 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上的二元函数，点 $P_0 \in D$（P_0 是 D 的聚点或孤立点）. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当点 $P \in U(P_0;\delta) \cap D$，就有 $|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$，则称 f 关于集合 D 在 P_0 连续.

若 f 在 D 上任何点都连续，则称 f 为 D 上的连续函数.

若 P_0 是 D 的聚点，则 f 关于 D 在 P_0 连续等价于

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0).$$

若 P_0 是 D 的聚点，但 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) \neq f(P_0)$，则称 P_0 是 f 的不连续点（或间断点）. 若 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$ 存在，但不等于 $f(P_0)$，则称 P_0 为可去间断点.

2. 复合函数的连续性　设函数 $u = \varphi(x,y)$ 和 $v = \psi(x,y)$ 在 xoy 平面上点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，并在点 P_0 连续，函数 $f(u,v)$ 在 uov 平面上点 $Q_0(u_0,v_0)$ 的某邻域内有定义，并在点 Q_0 连续，其中 $u_0 = \varphi(x_0,y_0)$，$v_0 = \psi(x_0,y_0)$，则复合函数 $g(x,y) = f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 P_0 也连续.

3. 有界闭域上连续函数的性质

（1）有界性与最大值、最小值定理　若函数 f 在有界闭域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 连续，则 f 在 D 上有界，且能取得最大值与最小值.

（2）一致连续性定理　若函数 f 在有界闭域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 连续，则 f 在 D 上一致连续.

（3）介值性定理　设函数 f 在区域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上连续，P_1，P_2 为 D 中任意两点，且 $f(P_1) < f(P_2)$，则对任何满足不等式 $f(P_1) < \mu < f(P_2)$ 的实数 μ，必存在点 $P_0 \in D$，使得 $f(P_0) = \mu$.

疑 难 解 析

1. 一元函数的极限概念与二元函数的极限概念有何异同？

答　一元函数的极限与二元函数的极限都是讨论在自变量的

某个变化趋势下，函数值与某个常量之间的关系.只是二元函数比一元函数对自变量的要求更高，也更为复杂.如对$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，只要求在$x_0$的左、右极限存在且相等，则函数在$x_0$的极限就存在.而对$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$，要求点$P(x,y)$以任何方式趋向于$P_0(x_0,y_0)$时，$f(x,y)$都趋向于同一个极限.任何方式包含了$x$与$y$的不同关系与趋向时的不同路径.这为我们判断函数不存在提供了方便.

在二元函数极限概念中还存在因自变量变化而产生的二重极限与二次极限的区别，而这在一元函数极限概念中是没有的.

但是，一元函数的极限的性质，如惟一性、局部有界性、局部保序性、局部追敛性以及极限的四则运算法则，在二元函数极限中依然成立.读者可试着证明.

2. 什么是二次极限与二重极限？它们之间有什么样的关系？

答 在求二元函数$f(x,y)$极限的过程中，如果自变量是同时变化的，则极限称为二重极限，如$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$.如果自变量的变化有先后之分，则极限称为二次极限，如$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$和$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$.二重极限与二次极限是两个不同的概念，彼此间关系很复杂.

如果$f(x,y)$存在$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$与$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$，则它们必相等.如果二重极限与两个二次极限都存在，则三者相等.

若两个二次极限存在但不相等，则二重极限必不存在，即二次极限存在也不能保证二重极限存在.同样，二重极限存在不能保证二次极限存在.

例如，对于函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin(1/x)\cos(1/y), & x\neq 0, y\neq 0,\\ 0, & x=0 \text{ 或 } y=0,\end{cases}$$

由于$|f(x,y)|\leqslant x^2+y^2$，所以$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$，但是两个二次极限都不存在.

而对于函数

$$f(x,y)=\begin{cases}y\sin(1/x), & x\neq 0, y\neq 0,\\ 0, & x=0 \text{ 或 } y=0,\end{cases}$$

二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(0,y)=0$ 存在，但先对 x 后对 y 的二次极限 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 不存在.

又如，对于函数

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2},$$

二次极限存在且相等，即 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$，但是二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在. 因为

沿直线 $x=0$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(0,y)=0$，

沿直线 $x=y$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x)=1$.

方法、技巧与典型例题分析

一、二元函数的极限

证明函数的极限难度是比较大的，因为要证明点 $P(x,y)$ 在任何方式下趋向于 $P(x_0,y_0)$ 时有同一极限是不可能的. 一般都用定义来证，即证当 $P\in U^\circ(P_0,\delta)$ 时，有 $|f(P)-A|<\varepsilon$ 成立. 也可以利用坐标系的转换，将二元函数化为一元函数的极限来证.

例 1 证明：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

证法 1 因为由 $|f(P)-A|$，得

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\frac{|xy|}{\sqrt{2|xy|}}\leqslant\sqrt{|x||y|},$$

所以，$\forall\ \varepsilon>0$. 令 $\delta=\varepsilon$，则当 $(x,y)\neq(0,0)$ 且 $0<|x-0|<\delta$，$0<|y-0|<\delta$ 时，有 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|<\varepsilon$，即

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

证法 2 将所给函数化为一元函数,令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,则 $\forall$ 任 θ,$(x,y)\to(0,0)$ 等价于 $r\to 0$,则

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = r\sin\theta\cos\theta.$$

由于 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$ 在 $r\to 0$ 时是有界量,所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} r\cos\theta\sin\theta = 0.$$

例 2 证明下列极限存在:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to+\infty}} \frac{xy-1}{y+1}=3$;　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}(4x^2+3y)=19$.

证 (1) $y\to+\infty$,可以设为 $y>0$,于是

$$\left|\frac{xy-1}{y+1}-3\right| = \left|\frac{xy-1-3y-3}{y+1}\right| = \left|\frac{(x-3)y-4}{y+1}\right|$$

$$\leqslant \frac{|x-3|y}{y+1} + \frac{4}{y+1} < |x-3| + \frac{4}{y}.$$

$\forall\ \varepsilon>0$,取 $0<\delta<\varepsilon/5, A>1/\delta$,则当 $|x-3|<\delta, y>A$ 时,恒有

$$\left|\frac{xy-1}{y+1}-3\right| < |x-3| + 4/y < \delta + 4/A$$

$$< \delta + 4\delta = 5\delta = \varepsilon,$$

所以
$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to+\infty}} \frac{xy-1}{y+1}=3.$$

(2) 取 $\delta_1=1$,并限定 $|x-2|<1, |y-1|<1$,则

$$|x+2| = |x-2+4| \leqslant |x-2| + 4 < 5.$$

$\forall\ \varepsilon<0$,要使不等式

$$|(4x^2+3y)-19| = |(4x^2-16)+3(y-1)|$$
$$\leqslant 4|x-2||x+2| + 3|y-1|$$
$$< 20(|x-2|+|y-1|) < \varepsilon$$

成立,只需 $|x-2|<\varepsilon/40, |y-1|<\varepsilon/40$,可取 $\delta_2=\varepsilon/40$. 于是,$\forall\ \varepsilon$

>0,$\exists\ \delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$,使得当$|x-2|<\delta$,$|y-1|<\delta$时,恒有

$$|(4x^2+3y)-19|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(4x^2+3y)=19.$$

例 3 证明:限制在区域 $D=\{(x,y)\,|\,|y|<x^2\}$ 内的函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 在点(0,0)存在极限 1(关于 D).

证 区域 D 如图 10.10 所示. $\forall\ \varepsilon>0$,要使不等式

$$\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-1\right|=\frac{2y^2}{x^2+y^2}\leqslant\frac{2y^2}{2|xy|}$$

$$=\frac{|y|}{|x|}<\frac{|x^2|}{|x|}=|x|<\varepsilon\ (\text{因为 } |y|<x^2)$$

成立,只需取 $\delta=\varepsilon$. 于是,$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta=\varepsilon>0$,$\forall\ (x,y)\in D$: $|x|<\delta$, $|y|<\delta$, 恒有 $\left|\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-1\right|<\varepsilon$ 成立. 故

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=1\ (\text{关于 } D).$$

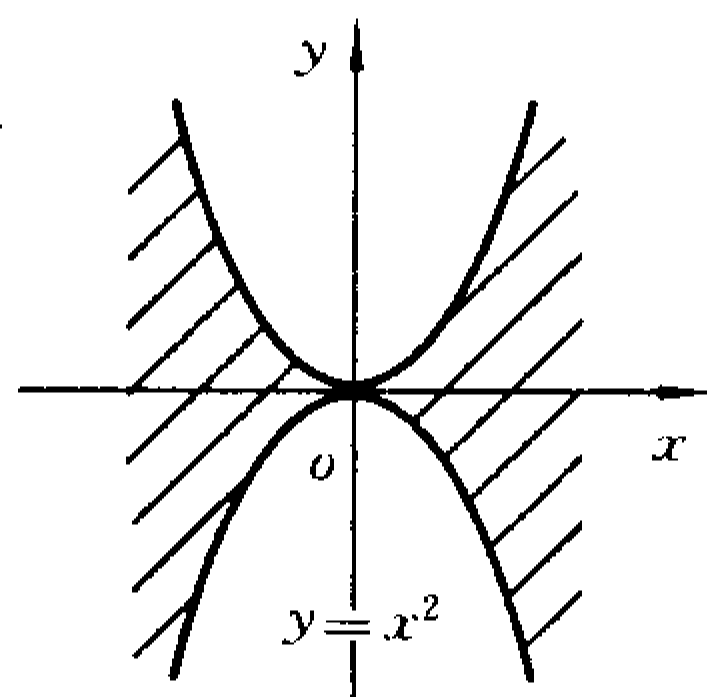


图 10.10

证明函数的极限不存在则要简单得多,一般的方法是:

(1) 在某种方式下点$(x,y)\to(x_0,y_0)$时,函数极限不存在;

(2) 在两种不同方式下点$(x,y)\to(x_0,y_0)$时,函数极限都存在,但不相等.

一般采用的趋向方式是:点(x,y)沿 $x=0$,或 $y=0$,或 $y=kx$,或 $y=x^k$ 趋向于(x_0,y_0).

例 4 证明:对于函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$,极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$不存在.

证 按 $y=kx\to(0,0)$方向取极限,得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4k^2}{x^4k^2+x^2(1-k^2)^2}.$$

当 $k=0$ 时，极限为零；当 $k=1$ 时，极限为 1. 故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

例 5 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}$；　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{\sqrt{|x|}}{3x+2y}$.

证 (1) 取 $x_n=1/n, y_n=0$，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x_ny_n)^{\frac{1}{x_n+y_n}}=\lim_{n\to\infty}[1+0]^n=1;$$

取 $x_n=\dfrac{1}{n}, y_n=\dfrac{-1}{n+1}$，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x_ny_n)^{\frac{1}{x_n+y_n}}=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n(n+1)}\right]^{n(n+1)}=e^{-1}.$$

从而知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$ 不存在.

(2) 当点 $P(x,y)$ 沿 $y=kx\to P_0(0,0)$ 时，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0;$$

当点 $P(x,y)$ 沿 $y=x^2\to P_0(0,0)$ 时，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}.$$

从而知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在.

(3) 当点 $P(x,y)$ 沿 $y=x^3-x\to P_0(0,0)$ 时，有

$$\begin{aligned}&\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3(x^3-x)+x(x^3-x)^4+x^2(x^3-x)}{x+(x^3-x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-x^3-x^4+o(x^4)}{x^3}=-1;\end{aligned}$$

当点 $P(x,y)$ 沿 $y=x\to P_0(0,0)$ 时，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y + xy^4 + x^2y}{x + y} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 + x^5 + x^3}{2x} = 0.$$

从而知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}$不存在.

(4) 当点 $P(x,y)$沿 $y=x\to(\infty,\infty)$时，有

$$\lim_{P\to\infty}\left|\frac{\sqrt{|x|}}{3x + 2y}\right| = \lim_{x\to\infty}\left|\frac{\sqrt{|x|}}{5x}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{|x|}} = 0;$$

当点 $P(x,y)$沿 $y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{\sqrt{|x|}}{2}\to(\infty,\infty)$时，有

$$\lim_{P\to\infty}\frac{\sqrt{|x|}}{3x + 2y} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|}} = 1.$$

从而知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{|x|}}{3x+2y}$不存在.

计算二元函数的极限常利用一元函数求极限的方法，如迫敛性、有界函数与无穷小量乘积、有理化、两个重要极限等方法. 如果能进行变量代换，化为一元函数形式，则洛必达法则、无穷大的次数比等方法也可以使用.

例 6 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$；　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 (1) 令 $x^2+y^2=t$，则当 $x\to0, y\to0$ 时，$t\to0$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2 + y^2)^2\ln(x^2 + y^2)$$

$$= \lim t^2\ln t = \lim \frac{\ln t}{1/t^2} \xlongequal{L'} \lim_{t\to 0} -\frac{1}{2}t^2 = 0.$$

(2) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}2\,\frac{\sin^2(x^2+y^2)/2}{[(x^2+y^2)/2]^2}\cdot\frac{x^2+y^2}{4x^2y^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=+\infty.$$

(3) 令 $\sqrt{x^2+y^2}=t$，当 $x\to0,y\to0$ 时，$t\to0$.

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^3}$$

$$\overset{L'}{=\!=}\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{3t^2}\overset{L'}{=\!=}\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.$$

(4) 利用连续性与极限运算法则，有

$$\lim_{\substack{x\to1\\y\to0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln2}{1}=\ln2.$$

例 7 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^{3/2}}{x^4+y^2}$； (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x^2y^2\ln(x^2+y^2)$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$； (4) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,a)}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{x^2/(x+y)}$；

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin[(y+1)(x^2+y^2)]}{x^2+y^2}$.

解 (1) 因为

$$0\leqslant\left|\frac{x^2y^{3/2}}{x^4+y^2}\right|\leqslant\left|\frac{x^2y^{3/2}}{2x^2y}\right|=\frac{1}{2}|y|\to0$$

成立，所以
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^{3/2}}{x^4+y^2}=0.$$

(2) 令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，由 $(x,y)\to(0,0)$ 得 $r\to0$，于是

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2y^2\ln(x^2+y^2)=\lim_{r\to0}r^4\frac{1}{4}\sin^22\theta\ln r^2.$$

由洛必达法则得 $\lim\limits_{r\to0}r^4\ln r^2=0$，而 $\sin^22\theta$ 为有界量，从而

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2y^2\ln(x^2+y^2)=0.$$

(3) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)}{x^2y}\cdot\frac{x^2y}{x^2+y^2},$$

而 $$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}|x|\to0,\quad\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)}{x^2y}=1,$$

故 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=0.$$

(4) 因为若 $x\to+\infty,y\to+\infty$时，可设 $x>0,y>0$，则

$$0<\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=\left(\frac{1}{2}\right)x^2\to0,$$

所以 $$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0.$$

(5) $$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{x^2/(x+y)}=\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left[\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{xy}\right]^{\frac{x}{y(x+y)}},$$

而 $$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\frac{x}{y(x+y)}=\frac{1}{a},\quad \lim_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{xy}=\mathrm{e},$$

故 $$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{x^2/(x+y)}=\mathrm{e}^{1/a}.$$

(6) $$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin[(y+1)(x^2+y^2)]}{x^2+y^2}$$
$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{[(y+1)(x^2+y^2)]}{(y+1)(x^2+y^2)}\cdot(y+1)=1\cdot1=1.$$

例 8 证明：若 $x=x_0+r\cos\theta,y=y_0+r\sin\theta$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \varepsilon>0,\forall\ r\ (0<r<\delta),\forall\ \theta\ (0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$，有

$$|f(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)-A|<\varepsilon.$$

证 此例事实上证明了极限过程中坐标变换的合理性.

必要性 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A$，则 $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0,\forall\ (x,y)$:

$$|x-x_0|<\delta,\quad |y-y_0|<\delta,$$

且 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$，有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

设 $x=x_0+r\cos\theta,y=y_0+r\sin\theta$，则 $\forall\ \theta:0<\theta<2\pi$，有

$$|x-x_0|=|r\cos\theta|\leqslant r,\quad |y-y_0|=|r\sin\theta|\leqslant r.$$

从而 $\forall\ r:0<r<\delta$ 和 $\forall\ \theta:0\leqslant\theta\leqslant2\pi$，有

$$|x-x_0|<\delta,\quad |y-y_0|<\delta,$$

且$(x,y)\neq(x_0,y_0)$,得

$$|f(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)-A|<\varepsilon.$$

充分性 若$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$,且$\forall\ r:0\leqslant r\leqslant\delta,\forall\ \theta:0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$,有

$$|f(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta-A|<\varepsilon.$$

设$x=x_0+r\cos\theta,y=y_0+r\sin\theta$,则$\forall\ \theta\in[0,2\pi]$,有

$$|x-x_0|\leqslant r,\quad |y-y_0|\leqslant r,$$

其中
$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

取$\eta=\delta/\sqrt{2}$,则$\forall\ \varepsilon>0,\eta>0$且$\forall\ (x,y)$,有

$$|x-x_0|<\eta,\quad |y-y_0|<\delta\ (r<\delta),$$

且$(x,y)\neq(x_0,y_0)$,于是

$$|f(x,y)-A|=|f(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)-A|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A.$$

例 9 若$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\varphi(x,y)=A$,$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\psi(x,y)=0$,且在$(x_0,y_0)$的邻域内$|f(x,y)-\varphi(x,y)|\leqslant\psi(x,y)$成立,证明:$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$.

证 由题设知$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$,使得$\forall\ (x,y):|x-x_0|<\delta$,$|y-y_0|<\delta$,且$(x,y)\neq(x_0,y_0)$,有

$$|\varphi(x,y)-A|<\varepsilon,\quad |\psi(x,y)-0|<\varepsilon.$$

于是,$\forall\ (x,y):|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta$,且$(x,y)\neq(x_0,y_0)$,

$$\begin{aligned}|f(x,y)-A|&\leqslant|f(x,y)-\varphi(x,y)|+|\varphi(x,y)-A|\\&\leqslant\psi(x,y)+|\varphi(x,y)-A|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,\end{aligned}$$

即
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A.$$

二、二元函数的连续性

如同极限问题一样,二元函数的连续性问题要比一元函数要

求更高，处理起来也更复杂. 但是，一切从基本概念出发，熟知连续性的定义和定理，参考一元函数连续性问题的解决方法，二元函数连续性的问题就不难解决.

例 10 求下列函数的间断点(或间断线)：

(1) $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$；　　(2) $z=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$；

(3) $z=\ln(1-x^2-y^2)$；　　(4) $z=\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sin\pi y}$.

解 考虑使函数无意义的点.

(1) 曲线 $y^2=2x$ 是函数的间断线.

(2) 直线 $x=m\pi$ 与 $y=n\pi$ $(m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$是函数的间断线.

(3) 圆周 $x^2+y^2=1$ 是函数的间断线.

(4) 直线 $y=m\pi$ $(m=0,1,2,\cdots)$和 $x=0$ 是函数的间断线.

例 11 讨论下列函数的连续性：

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

(3) $f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$；　　(4) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

解 (1) 当 $x^2+y^2\neq0$ 时，函数 $f(x,y)$连续.

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}\cdot\frac{\sin(xy)}{xy}=\lim\frac{k}{1+k^2}$$

显然与 k 有关. 所以函数 $f(x,y)$在点(0,0)不连续.

即函数 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上除点(0,0)外都连续.

(2) 当 $x^2+y^2\neq0$ 时，函数 $f(x,y)$连续. 由

$$0<\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\to0$$

知，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. 所以函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)连续.

即函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续.

(3) $\forall\ (x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$，有

$$
\begin{aligned}
&|f(x,y)-f(x_0,y_0)| \\
&= \left|\sin\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x_0^2+y_0^0}\right| \\
&= 2\left|\cos\frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}}{2}\right|\left|\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{2}\right| \\
&\leqslant \left|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right| \leqslant \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},
\end{aligned}
$$

则 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta=\varepsilon$，当 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon,$$

即函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续，所以 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续.

(4) 函数 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\neq 0$ 时连续.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}$$

随 k 变化而变化，所以 $f(x,y)$ 在点(0,0)不连续.

即函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上除点(0,0)外连续.

例 12 讨论以下函数的连续性：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin(x-2y)}{x-2y}, & x\neq 2y,\\ 0, & x=2y.\end{cases}$$

解 当 $x\neq 2y$ 时，函数 $f(x,y)$ 连续.

当 $x_0=2y_0\neq 0$ 时，取路径 $x=2y$，有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0=x_0/2}} f(x,y)=\lim_{x\to x_0} x_0\frac{\sin(x-2y_0)}{x-2y_0}=x_0,$$

而在点(0,0)，极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\frac{\sin(x-2y)}{x-2y}=0=f(0,0),$$

从而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续.

但 $x_0\neq 0$，故不等于 $f(0,0)$，直线 $2y=x$ 上除点 $(0,0)$ 外的点是函数的间断点.

例 13 证明：函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 当 (x,y) 沿过点 $(0,0)$ 的每一条射线

$$x=t\cos\alpha,\quad y=t\sin\alpha\quad(0<t<+\infty)$$

连续，即 $\lim\limits_{t\to 0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=f(0,0)$. 但函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续.

证 当 $\sin\alpha=0$ 时，$\cos\alpha=1$ 或 -1. 当 $t\neq 0$ 时，$f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\dfrac{t^2\cdot 0}{t^4+0}=0$，而 $f(0,0)=0$，故 $\lim\limits_{t\to 0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=f(0,0)$.

但当点 (x,y) 沿曲线 $y=x^2\to(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}\neq f(0,0),$$

从而，函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续.

例 14 设函数 $f(x,y)$ 在域 D 内对变量 x 是连续的，并对变量 y 满足李卜希兹条件，即 $\forall\ (x,y'),(x,y'')\in D$，有

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant L|y'-y''|,$$

其中 L 为常数. 证明：$f(x,y)$ 在 D 上连续.

证 $\forall\ (x_0,y_0)\in D$，由于 $f(x,y)$ 对 x 连续，则 $f(x,y_0)$ 在 x_0 连续，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta_1(x_0,y_0)>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时，有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon/2.$$

取 $\delta_2=\varepsilon/(2L)>0$，则当 $|y-y_0|<\delta$ 时，由条件有

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|\leqslant L|y-y_0|<L\varepsilon/(2L)=\varepsilon/2.$$

故取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$，且 $U((x_0,y_0),\delta)\subset D$ 时，有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|$$

$$\leqslant |f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|$$
$$\leqslant \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,$$
即知 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)连续. 由(x_0,y_0)的任意性知,$f(x,y)$在 D 上连续.

例 15 证明尤格定理:若 $f(x,y)$分别对于 x 与 y 连续,且对于其中一个变量是单调的,则 $f(x,y)$对两个变量总体是连续的.

证 由题设,$f(x,y)$对任意(x_0,y_0)关于 x 和 y 连续,则$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta_1>0$,使得当$|x-x_0|<\delta_1$ 时,有
$$|f(x,y_0)-f(x,y)|<\varepsilon/2.$$
特别地,有
$$|f(x_0+\delta_1,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon/2,$$
$$|f(x_0-\delta_1,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon/2.$$
$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta_2>0$,使得当$|y-y_0|<\delta_2$ 时,有
$$|f(x_0+\delta_1,y)-f(x_0+\delta_1,y_0)|<\varepsilon/2,$$
$$|f(x_0-\delta_1,y)-f(x_0-\delta_1,y_0)|<\varepsilon/2.$$
于是,当$|x-x_0|\leqslant\delta_1$,$|y-y_0|\leqslant\delta_2$ 时,由 $f(x,y)$对 x 的单调性得
$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant \max\{|f(x_0-\delta_1,y)-f(x_0,y_0)|,$$
$$|f(x_0+\delta_1,y)-f(x_0,y_0)|\}<\varepsilon.$$
在 $f(x,y)$对于 y 单调时同样可证.

例 16 证明:若函数 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上连续,且$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}f(x,y)=A$,则函数 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上一致连续.

证 由$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}f(x,y)=A$ 知:$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ T>1$,对任意的$(x,y)\in\mathbf{R}^2$,当$|x|>T$,$|y|>T$ 时,有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$. 从而,$\forall\ (x_1,y_1)$和(x_2,y_2),当$|x_1|>T$,$|x_2|>T$,$|y_1|>T$,$|y_2|>T$ 时,有
$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|$$
$$\leqslant |f(x_1,y_1)-A|+|f(x_2,y_2)-A|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,$$
即 $f(x,y)$在区域 $D=\{(x,y)\,|\,|x|>T,|y|>T\}$内一致连续.

而在有界闭方形区域 $G=\{(x,y)\,|\,|x|<T+1,|y|<T+1\}$

内，由于 $f(x,y)$ 连续，所以一致连续. 即 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ 0<\delta<1$，对于 (x_1,y_1)，$(x_2,y_2)\in G$，且 $|x_1-x_2|<\delta$，$|y_1-y_2|<\delta$，有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon.$$

这样，$\forall\ (x_1,y_1)$ 与 $(x_2,y_2)\in\mathbf{R}^2$，只要 $|x_1-x_2|<\delta$，$|y_1-y_2|<\delta$，点 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2) 一定同在 D 或 G 内. 于是

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<2\varepsilon,$$

即 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上一致连续.

例 17 证明：对于函数 $f(x,y)=x\sin(1/y)$，若 $y\neq0$，则 $f(x,y)=0$ 的间断点的集合不是封闭的.

证 当 $y_0\neq0$ 时，函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续. 即在 $\mathbf{R}^2$ 上除 x 轴外的一切点连续. 又

$$0\leqslant|f(x,y)-f(0,0)|=|f(x,y)|\leqslant|x|\to0,$$

所以，当 $y_0\neq0$ 时，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 也连续.

当 $x_0\neq0$ 时，对点 $(x_0,0)$，极限 $\lim\limits_{y\to0}x_0\sin(1/y)$ 不存在. 所以，当 $x_0\neq0$ 时，$f(x,y)$ 在点 $(x_0,0)$ 不连续. 也就是说，$f(x,y)$ 的全部不连续点为 x 轴上除点 $(0,0)$ 外的所有点，但点 $(0,0)$ 是不连续点的聚点而不是间断点. 从而知 $f(x,y)$ 的不连续点的集合不封闭.

例 18 设函数 $f(x,y)$ 在域 $a\leqslant x\leqslant A$，$b\leqslant y\leqslant B$ 上连续，函数列 $\varphi_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛并满足 $b\leqslant\varphi_n(x)\leqslant B$. 证明：函数列 $F_n(x)=f(x,\varphi_n(x))$ $(n=1,2,\cdots)$ 也在 $[a,A]$ 上一致收敛.

证 由于 $f(x,y)$ 在闭域 $a\leqslant x\leqslant A$，$b\leqslant y\leqslant B$ 上连续，故必一致连续，则 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $y',y''\in[b,B]$ 时，只要 $|y'-y''|<\delta$，就有 $|f(x,y')-f(x,y'')|<\varepsilon$.

又 $\varphi_n(x)$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛，故 $\exists\ N\in\mathbf{N}$，当 $m>N$，$n>N$ 时，$\forall\ x\in[a,A]$，有 $|\varphi_m(x)-\varphi_n(x)|<\delta$.

由题设，$b\leqslant\varphi_m(x)$，$\varphi_n(x)\leqslant B$，故 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，当 $m>N$，$n>N$，且 $a\leqslant x\leqslant A$ 时，有

$$|F_m(x)-F_n(x)|=|f(x,\varphi_m(x))-f(x,\varphi_n(x))|<\varepsilon,$$

即 $F_n(x)$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛.

例 19 设 $f(x,y)$ 在域 $a<x<A, b<y<B$ 内连续,函数 $\varphi(x)$ 在区间 (a,A) 连续并有属于区间 (b,B) 的值.证明:函数 $F(x)=f[x,\varphi(x)]$ 在区间 (a,A) 内连续.

证 任取点 (x_0,y_0) 属于 $a<x<A, b<y<B$,则 $\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta>0$,使得当 $|x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

又对上述 $\delta>0, \exists\ \eta<0$(可取 $\eta<\delta$),使得当 $|x-x_0|<\eta$ $(x\in(a,A))$ 时,有

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|=|y-y_0|<\delta,$$

于是 $$|F(x)-F(x_0)|=|f(x,\varphi(x))-f(x_0,\varphi(x_0))|<\varepsilon,$$

即 $F(x)$ 在 x_0 连续.由 x_0 的任意性知,$F(x)$ 在区间 (a,A) 内连续.

例 20 设函数 $f(x,y)$ 在域 $R(a<x<A, b<y<B)$ 内连续,函数 $x=\varphi(u,v)$ 与 $y=\psi(u,v)$ 在域 $R'(a'<u<A', b'<v<B')$ 内连续并有属于 (a,A) 与 (b,B) 的值.证明:函数 $F(u,v)=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ 在域 R' 内连续.

证 取足够小的 δ 与 η,使得点的 δ 或 η 邻域在所给域内.

任取 $(x_0,y_0)\in R$,则 $\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta>0$,使得当 $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

由 $\varphi(u,v)$ 与 $\psi(u,v)$ 的连续性知,$\forall$ 上述 $\delta<0, \forall\ \eta>0$,使得当 $|u-u_0|<\eta, |v-v_0|<\eta$ 时,有

$$|x-x_0|<\delta,\quad |y-y_0|<\delta,$$

其中 $$x_0=\varphi(u_0,v_0),\quad y_0=\psi(u_0,v_0).$$

于是,$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta>0$,使得当 $|u-u_0|<\eta, |v-v_0|<\eta$ 时,有

$$|F(u,v)-F(u_0,v_0)|$$

$$=|f(\varphi(u,v),\psi(u,v))-f(\varphi(u_0,v_0),\psi(u_0,v_0))|<\varepsilon,$$

则 $F(u,v)$ 在点 (u_0,v_0) 连续.由 (u_0,v_0) 的任意性知,$F(u,v)$ 在 R' 内连续.

第三节　多元函数的偏导数与全微分

主要内容

1. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有定义，$\forall\ P(x,y)=(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in U(P)$，若函数 $f(x,y)$ 在 P_0 的全增量 Δz 可表示为

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\ &= A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\end{aligned}$$

其中 A,B 是仅与 P_0 有关的常数，$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，则称函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 可微.

$\Delta x,\Delta y$ 的线性函数 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数在点 P_0 的全微分. 记作 $\mathrm{d}z|_{P_0}$ 或 $\mathrm{d}f(x_0,y_0)$.

2. 设函数 $f(x,y)$ 定义在 D 上，若 $(x_0,y_0)\in D$，且 $f(x,y)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，则称极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 关于 x 的偏导数，记作

$$f_x(x_0,y_0)\quad 或\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0}.$$

类似地，定义极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 关于 y 的偏导数.

若函数 $f(x,y)$ 在 D 上每一点 (x,y) 都存在关于 x（或 y）的偏导数，则称函数 $f(x,y)$ 在 D 上有关于 x（或 y）的偏导函数，记作 $f_x(x,y),f_y(x,y)$；$\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$；简记为 f_x,z_x.

3. 偏导数的几何意义　$f_x(x_0,y_0)$表示曲面$z=f(x,y)$与平面$y=y_0$的交线$\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=y_0\end{cases}$在点$(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$的切线$T_x$的斜率(或切线$T_x$与$x$轴正向夹角$\alpha$的正切). 类似地,$f_y(x_0,y_0)$表示曲面$z=f(x,y)$与平面$x=x_0$的交线$\begin{cases}z=f(x,y),\\ x=x_0\end{cases}$在点$(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$的切线$T_y$的斜率(或切线$T_y$与$y$轴正向夹角$\beta$的正切). 即

$$f_x(x_0,y_0)=\tan\alpha,\quad f_y(x_0,y_0)=\tan\beta.$$

4. 可微的必要条件　若函数$f(x,y)$在其定义域内一点(x_0,y_0)可微,则函数f在该点的偏导数$f_x(x_0,y_0)$,$f_y(x_0,y_0)$都存在,且

$$\mathrm{d}f|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$$

或

$$\mathrm{d}z=f_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x+f_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y.$$

5. 可微的充分条件　若函数$f(x,y)$的偏导数在$U((x_0,y_0);\delta)$存在,且f_x与f_y在点(x_0,y_0)连续,则函数f在点(x_0,y_0)可微.

6. 设函数$f(x,y)$在$U((x_0,y_0);\delta)$存在偏导数,$(x,y)\in U((x_0,y_0);\delta)$,则$\exists\ \xi=x_0+\theta_1(x-x_0)$,$\eta=y_0+\theta_2(y-y_0)$, $0<\theta_1,\theta_2<1$,使得

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f_x(\xi,y)(x-x_0)+f_y(x_0,\eta)(y-y_0).$$

7. 曲面$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$存在不平行于z轴的切平面π的充要条件是,函数f在点$P_0(x_0,y_0)$可微.

若函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)可微,则曲面$z=f(x,y)$在点$P(x_0,y_0,z_0)$的切平面方程和法线方程分别为

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0),$$

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

疑难解析

1. 说明函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续与在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的偏导数之间的关系.

答 函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续，则 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的偏导数不一定存在. 例如 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 连续，但是

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

不存在. 同理，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}$ 也不存在，这是因为 $f(x,y)$ 连续不能保证左、右导数存在且相等.

反之，函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的偏导数存在也不能确定函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续. 例如

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 存在偏导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=0$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0$，但在点 $(0,0)$ 不连续. 这是因为 $f_x(x_0,y_0)$ 只反映函数 $f(x,y_0)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 作为 x 的函数在 x_0 是连续的，$f_y(x_0,y_0)$ 只反映函数 $f(x_0,y)$ 作为 y 的函数在 y_0 是连续的. 而 $f(x,y_0)$ 在 x_0 连续与 $f(x_0,y)$ 在 y_0 连续并无必然联系，并且 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续要求函数 $f(x,y)$ 在经过点 $P_0(x_0,y_0)$ 的任何方向上连续，这是偏导数存在不能保证的.

但是函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微时，由定义 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$，保证 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

2. 说明函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微与偏导数存在之间的关系.

答 若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的偏导数必存在. 因为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 偏导数存在是 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微的必要条件，且

$$\mathrm{d}f|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x + f_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y.$$

但反过来不一定成立，例如，$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，在点 $(0,0)$ 有 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$，但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微. 因为若按上式，有

$$\mathrm{d}f|_{(0,0)} = 0\cdot\mathrm{d}x + 0\cdot\mathrm{d}y = 0.$$

而 $\Delta f = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = \sqrt{|\Delta x\Delta y|}$,

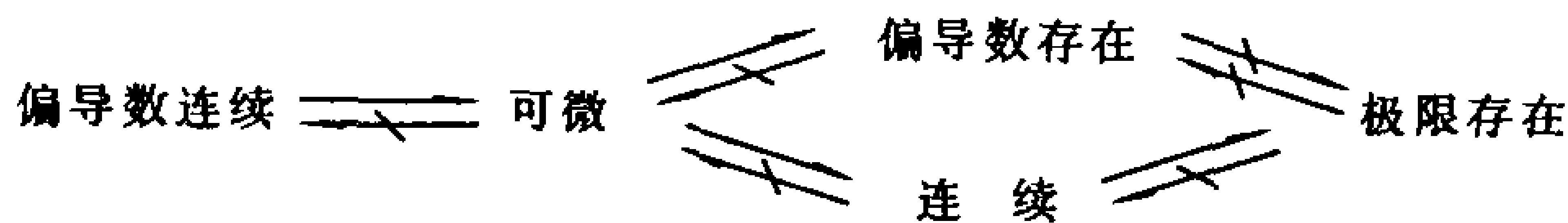
当取 $\Delta x=\Delta y$ 时，$\Delta f=|\Delta x|$，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{2}\,|\Delta x|$，故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f-\mathrm{d}f}{\rho}=\lim\frac{|\Delta x|}{\sqrt{2}\,|\Delta x|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0,$$

从而，Δf 与 ρ 为同阶无穷小，与可微性定义相矛盾. 因此，$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 不可微.

若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内偏导数存在，且偏导数在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续，则函数在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微. 但偏导数在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续不是函数可微的必要条件.

二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的可微、连续、极限与偏导数存在之间有如下关系.



方法、技巧与典型例题分析

在计算函数在其一点的偏导数或区域上的偏导函数时，可以利用一元函数的求导法则，只要牢记只有一个变量在变，而把其余变量视作常数就行. 也可以利用全微分的形式不变性求偏导数，即求出全微分时同时得到几个偏导数. 这样不仅简捷方便，而且在计

算中还不必区别自变量与中间变量，避免出错.

若函数在个别孤立点有定义但不知偏导数是否存在，更不知偏导函数在该点是否连续，则必须依定义来讨论函数在该点的偏导数.

例 1 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$：(1) 偏导数是否存在；(2) 偏导数是否连续；(3) 是否可微.

解 (1) 由定义知

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x^2)}{x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2\sin(1/y^2)}{y}=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 偏导数存在.

(2) 因为当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，$f(x,y)$ 偏导数存在，故

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}2x\left[\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{1}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}\right], & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{cases}2y\left[\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{1}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}\right], & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 与 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 不存在，故偏导数在点 $(0,0)$ 不连续.

(3) $\Delta z=[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\dfrac{1}{(\Delta x)2+(\Delta y)^2}$,

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\rho\to 0}\rho\sin\frac{1}{\rho^2}=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微，且全微分 $dz=0$.

本例说明在二元函数的不连续点函数仍可能可微. 偏导数连

续是可微的充分条件，而不是充要条件.

例 2 证明：$f_x(x,b)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x,b)]$.

证 依定义知

$$f_x(x,b)=\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\right]_{y=b},$$

而
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x,b)]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,b)-f(x,b)}{\Delta x}.$$

因为 y 与 Δx 无关，所以

$$\begin{aligned}&\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\right]_{y=b}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\right]_{y=b}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,b)-f(x,b)}{\Delta x},\end{aligned}$$

即
$$f_x(x,b)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x,b)].$$

例 3 (1) $f(x,y)=\begin{cases}xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$

求 $f_x(0,0)$，$f_x(x,0)$ $(x\neq 0)$，$f_x(0,y)$ $(y\neq 0)$；

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$

求 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$，$f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$.

解 由于点(0,0)是分段函数分界点，故需依定义求解.

(1) $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$,

当 $x\neq 0$ 时，$f_x(x,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$;

当 $y\neq 0$ 时，$f_x(0,y)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,y)-f(0,y)}{\Delta x}=-y$.

(2) 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，应用求导公式，得

$$f_x(x,y)=\frac{(x^2+y^2)y-xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{(x^2+y^2)x-xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2};$$

当 $x^2+y^2=0$ 时，依定义得

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0.$$

例 4 求下列函数的偏导数：

(1) $z=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　　(2) $z=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$；

(3) $z=(1+xy)^x$；　　(4) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$；

(5) $u=xze^{\sin(yz)}$；　　(6) $u=\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}-\dfrac{x}{z}$.

解 (1)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left[1\Bigg/\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\right]\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x^2/\sqrt{x^2+y^2}}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}$$

$$=\frac{|y|}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left[1\Bigg/\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\right]\frac{(-xy)/\sqrt{x^2+y^2}}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}$$

$$=-\frac{xy}{|y|(x^2+y^2)}.$$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=1\Bigg/\left[1+\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2\right]\dfrac{(x-y)+(x+y)}{(x-y)^2}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=1\Bigg/\left[1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2\right]\frac{(x-y)+(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

(3) 对 $z=(1+xy)^x$ 两边取对数，得

$$\ln z=x\ln(1+xy),$$

两边分别对 x 求导，得 $\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=\ln(1+xy)+x\dfrac{y}{1+xy}$，故

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (1 + xy)^x\left[\ln(1 + xy) + \frac{xy}{1 + xy}\right],$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x(1 + xy)^{x-1} \cdot x = x^2(1 + xy)^{x-1}.$$

(4) $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(x+\sqrt{x^2+y^2})}.$$

(5) $$\frac{\partial u}{\partial x}=ze^{\sin(yz)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}= xze^{\sin(yz)}\cos(yz)\cdot z = xz^2e^{\sin(yz)}\cos(yz),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}= xe^{\sin(yz)} + xze^{\sin(yz)}\cos(yz)\cdot y$$

$$= xe^{\sin(yz)}[1 + yze^{\cos(yz)}\cos(yz)].$$

(6) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}-\dfrac{1}{z}$, $\quad\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{z}{y^2}$, $\quad\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{x}{z^2}$.

例 5 利用对称性,求下列函数的偏导数:

(1) $z=x^yy^x$; (2) $u=\ln(x^yy^zz^x)$, $x>0,y>0,z>0$;

(3) $z=(x^2+y^2)e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$; (4) $z=xy-\dfrac{2xy^3}{x^2+y^2}$.

解 函数的对称性是指函数的任意两个自变量交换位置后函数不变的性质,如 $z=x^2\arctan(x/y)+y^2\arctan(y/x)$就是如此.对称性可以使计算变得简便.有些函数虽然不是对称函数,但利用轮换对称或对换,也能得到对称性的效果.

(1) 等式两边取对数,得

$$\ln z = y\ln x + x\ln y,$$

两边再对 x 求导,得$\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{x}+\ln y$,故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z\left(\frac{y}{x}+\ln y\right)=x^y y^x\left(\frac{y}{x}+\ln y\right).$$

依对称性得 $$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y y^x\left(\frac{x}{y}+\ln x\right).$$

（2）直接求导，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{\frac{x^2+y^2}{xy}}+(x^2+y^2)e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}\left[\frac{2x\cdot xy-(x^2+y^2)y}{x^2y^2}\right]$$

$$=\frac{x^4-y^4+2x^3y}{x^2y}e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}.$$

依对称性得 $$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y^4-x^4+2xy^3}{xy^2}e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}.$$

（3）$u=\ln(x^y y^z z^x)=y\ln x+x\ln y+x\ln z$ 不是三元对称函数，但在变换 $\begin{pmatrix} x & y & z \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ y & z & x \end{pmatrix}$ 下，函数不变，称为三元轮换对称函数（在多元函数积分学中常见）. 可对任一变量的结果进行字母（变量）的轮换得到需要的结果.

u 对 x 直接求导，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x}+\ln z.$$

利用变换轮换变量，得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{z}{x}+\ln x,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{x}{z}+\ln y.$$

（4）z 不是 x 和 y 的对称函数，但由

$$z=xy-\frac{2xy^3}{x^2+y^2}=xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

可知，当 x,y 互换后所得函数与原来函数只相差一个负号，即 $(f(x,y))=-f(y,x)$. 故

$$\frac{\partial}{\partial y}[f(x,y)]=-\frac{\partial}{\partial y}[-f(x,y)]=-\frac{\partial}{\partial y}[f(y,x)].$$

因为 $$\frac{\partial z}{\partial x}=y-\frac{2y^3(x^2+y^2)-2xy^3\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= y + \frac{2y^3(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

所以
$$\frac{\partial z}{\partial y} = - x + \frac{2x^3(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

例 6 设 $u=\sin x+\varphi(\sin x+\cos y)$，其中 φ 为可导函数，且当 $x=0$ 时，$u=\sin^2 y$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$.

解 先求 $\varphi(t)$ 的表达式. 因为 $x=0$ 时，$u=\sin^2 y$，即

$$u = \varphi(\cos y) = \sin^2 y = 1 - \cos^2 y,$$

所以
$$\varphi(t) = 1 - t^2,$$

$$\varphi(\sin x + \cos y) = 1 - (\sin x + \cos y)^2,$$

从而
$$u = \sin x + 1 - (\sin x + \cos y)^2,$$

于是
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x - 2(\sin x + \cos y)\cos x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2(\sin x + \cos y)\sin y.$$

例 7 求下列函数的偏导数：

(1) $u=x^{yz}$；　　　(2) $u=\left(\frac{x}{y}\right)^{y/z}$.

解 先求全微分，再求偏导数.

(1) 两边取对数，得 $\ln u=yz\ln x$，再求微分，得

$$\frac{1}{u}\mathrm{d}u = \frac{yz}{x}\mathrm{d}x + z\ln x\mathrm{d}y + y\ln x\mathrm{d}z,$$

即
$$\mathrm{d}u = x^{yz}\left[\frac{yz}{x}\mathrm{d}x + z\ln x\mathrm{d}y + y\ln x\mathrm{d}z\right],$$

得
$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^{yz}\frac{yz}{x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{yz}z\ln x \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{yz}y\ln x.$$

(2) 两边取对数，得

$$\ln u = \frac{y}{z}\ln\frac{x}{y} = \frac{y}{z}(\ln x - \ln y),$$

两边求微分，得

$$\frac{1}{u}\mathrm{d}u = \frac{y}{zx}\mathrm{d}x + \frac{1}{z}\left(\ln\frac{x}{y} - 1\right)\mathrm{d}y - \frac{y}{z^2}\ln\frac{x}{y}\mathrm{d}z.$$

即 $$\mathrm{d}u = \left(\frac{x}{y}\right)^{y/z}\left[\frac{y}{xz}\mathrm{d}x + \frac{1}{z}\left(\ln\frac{x}{y} - 1\right)\mathrm{d}y - \frac{y}{z^2}\ln\frac{x}{y}\mathrm{d}z\right],$$

得 $$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{x}{y}\right)^{y/z}\frac{y}{xz},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{x}{y}\right)^{y/z}\frac{1}{z}\left(\ln\frac{x}{y} - 1\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\left(\frac{x}{y}\right)^{y/z}\frac{y}{z^2}\ln\frac{x}{y}.$$

例 8 计算下列偏导数：

(1) $z=x^2+(y^2-1)\tan\sqrt{x/y}$，求 $z_x(x,1)$；

(2) $z=\dfrac{\cos(x-2y)}{\cos(x+y)}$，求 $z_y\left(\pi,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

解 (1) 先求偏导函数，再求偏导数值.

$$z_x = 2x + (y^2-1)\sec^2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= 2x + \frac{y^2-1}{2\sqrt{xy}}\sec^2\sqrt{\frac{x}{y}},$$

则 $$z_x(x,1) = 2x.$$

(2) 先求一元函数 $f(\pi,y)$ 和 $f_y(\pi,y)$，得

$$f(\pi,y) = \frac{\cos(\pi-2y)}{\cos(\pi+y)} = \frac{\cos 2y}{\cos y},$$

$$f_y(\pi,y) = \frac{-2\sin 2y\cos y + \cos 2y\sin y}{\cos^2 y},$$

则 $$z_y(\pi,\pi/4) = -2\sqrt{2}.$$

计算函数的全微分，可以用先求各个偏导数后组合的方法，也可以由一阶微分的形式不变性直接求出.

例 9 求下列函数的全微分：

(1) $z=x\ln(xy)$；　　(2) $z=y\cos(x-2y)$ 在点$(\pi,\pi/4)$；

(3) $u=xe^{yz}+e^{-z}+y$ 在点$(1,2,1)$.

解 (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+1=\ln(exy),\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}$,故

$$dz=\ln(exy)dx+\frac{x}{y}dy.$$

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=y\sin(x-2y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\cos(x-2y)+2y\sin(x-2y)$,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\pi,\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\pi}{4},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\pi,\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\pi}{2},$$

故
$$dz|_{\left(\pi,\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\pi}{4}(dx+2dy).$$

(3) $\frac{\partial u}{\partial x}=e^{yz}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xze^{yz}+1$, $\frac{\partial u}{\partial z}=xye^{yz}-e^{-z}$,

$$dz=e^{yz}dx+(xze^{yz}+1)dy+(xye^{yz}-e^{-z})dz,$$

故
$$dz|_{(1,2,1)}=e^2dx+(e^2+1)dy+(2e^2-e^{-1})dz.$$

当求空间曲面的切平面与法线方程时,若曲面由显式方程给出,则只需求出各个偏导数,然后依公式代入即可.

例 10 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

解 令 $u=x^2+2y^2+z^2-1$,则$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\frac{\partial u}{\partial y}=4y,\frac{\partial u}{\partial z}=2z$,故平面法向量 $\boldsymbol{n}=(2x,4y,2z)$.

而已知平面法向量为$\{1,-1,2\}$,由平行关系得

$$\frac{2x}{1}=\frac{4y}{-1}=\frac{2z}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{2}z,y=-\frac{1}{4}z.$$

代入椭球面方程得

$$(z/2)^2+2(-z/4)^2+z^2=1.$$

解得
$$z=\pm2\sqrt{\frac{2}{11}},\quad x=\pm\sqrt{\frac{2}{11}},\quad y=\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}.$$

所求切平面方程为

$$\left(x\mp\sqrt{\frac{2}{11}}\right)-\left(y\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}\right)+2\left(z\mp2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=0,$$

即 $$x-y+2z=\pm\sqrt{11/2}.$$

例 11 在曲面 $z=xy$ 上求一点,使得在这点的法线垂直于平面 $x+2y+z+9=0$,求法线方程.

解 令 $u=xy-z$,则 $\frac{\partial u}{\partial x}=y,\frac{\partial u}{\partial y}=x,\frac{\partial u}{\partial z}=-1$. 于是平面法向量 $\boldsymbol{n}=\{y,x,-1\}$.

而已知平面法向量为$\{1,3,1\}$,与 $\boldsymbol{n}$ 平行. 由

$$\frac{y}{1}=\frac{x}{3}=\frac{-1}{1}\Rightarrow x=-3,\quad y=-1,\quad z=xy=3,$$

所求点为 $P(-3,-1,3)$,法线方程为

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

例 12 设 $f(x,y)$在域 D 内有一阶连续偏导数,且恒有 $f_x=f_y=0$,证明:f 是 D 内常数函数.

证 由题设知,$f(x,y)$在 D 内可微,则

$$\mathrm{d}f=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y=0\Rightarrow f=c(\text{常数}),$$

故$\forall\ (x,y)\in D,f(x,y)=c$(常数).

例 13 证明:若在域 D 上,$f(x,y)$(对每一个固定的 y)对 x 连续,且对 y 的偏导数有界,则 $f(x,y)$在 D 上连续.

证 任取$(x_0,y_0)\in D$,由 $f(x,y)$对 x 连续知,$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$,当$|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon/2.$$

又由拉格朗日中值定理知

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=|f_y'(x,\xi)(y-y_0)|\leqslant M|y-y_0|,$$

其中 ξ 位于 y 与 y_0 之间,$|f'_y|\leqslant M$.

取 $\delta'=\min\left\{\delta,\frac{\varepsilon}{2(M+1)}\right\}$,当$|x-x_0|<\delta',|y-y_0|<\delta'$时,有

$$\begin{aligned}&|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\\ \leqslant\ &|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\ \leqslant\ &M|y-y_0|+\varepsilon/2<\varepsilon.\end{aligned}$$

即 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续. 由 (x_0,y_0) 的任意性知, $f(x,y)$ 在 D 内连续.

例 14 证明:若 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 在矩形域 D 有界,则函数 $f(x,y)$ 在 D 内一致有界.

证 因为 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 在 D 有界,即 $\forall\ (x,y)\in D$, $\exists\ M>0$,有 $|f_x(x,y)|\leqslant M$ 与 $|f_y(x,y)|\leqslant M$. 因而 $\forall\ P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)\in D$,有 $Q(x_2,y_1)$. $\forall\ \varepsilon>0$,使得

$$\begin{aligned}
&|f(P_1)-f(P_2)| = |f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| \\
&\leqslant |f(x_1,y_1)-f(x_2,y_1)| + |f(x_2,y_1)-f(x_2,y_2)| \\
&= |f_x(\xi,y_1)||x_1-x_2| + |f_y(x_2,\eta)||y_1-y_2| \\
&\leqslant M|x_1-x_2| + M|y_1-y_2| \leqslant 2M|P_1-P_2| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

其中 ξ 在 x_1,x_2 之间, η 在 y_1,y_2 之间. 取 $\delta=\varepsilon/(2M)>0$,于是, $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta=\varepsilon/(2M)>0$,使得 $\forall\ P_1,P_2\in D$: $|P_1-P_2|<\delta$,有上面的不等式成立,即 $f(x,y)$ 在 D 内一致连续.

第四节 复合函数微分法与方向导数

主要内容

一、复合函数微分法

设函数 $x=\varphi(s,t)$, $y=\psi(s,t)$ 定义在 sot 平面的区域 D 上,函数 $z=f(x,y)$ 定义在 xoy 平面的区域 D_1 上,且

$$\{(x,y)\,|\,x=\varphi(s,t),y=\psi(s,t),(s,t)\in D\}\subset D_1,$$

则函数 $z=F(s,t)=f[\varphi(s,t),\psi(s,t)]$, $(s,t)\in D$ 是以 $z=f(x,y)$ 为外函数, $x=\varphi(s,t)$, $y=\psi(s,t)$ 为内函数的复合函数.

1. **定理** 若函数 $x=\varphi(s,t)$, $y=\psi(s,t)$ 在点 $(s,t)\in D$ 可微, $z=f(x,y)$ 在点 $(x,y)=[\varphi(s,t),\psi(s,t)]$ 可微,则复合函数 $z=$

$f[\varphi(s,t),\psi(s,t)]$在点$(s,t)$可微,它关于$s$与$t$的偏导数分别为

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},\quad \frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

2. 若$z=f(x,y)$可微,则$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$.

若$z=f[\varphi(s,t),\psi(s,t)]$可微,则

$$\begin{aligned} dz&=\frac{\partial z}{\partial s}ds+\frac{\partial z}{\partial t}dt \\ &=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)dt \\ &=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt\right). \end{aligned}$$

因而又有$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$,即多元函数的一阶微分形式不变性.

二、方向导数与梯度

1. 设函数$f(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的某邻域$U(P_0)\subset\mathbf{R}^3$内有定义.$\boldsymbol{l}$为从点$P_0$出发的射线,$P(x,y,z)$为$\boldsymbol{l}$上且含于$U(P_0)$内的任一点,以$\rho$表示$P$与$P_0$间的距离.若极限

$$\lim_{\rho\to0^+}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\Delta_l f}{\rho}$$

存在,则称此极限为函数f在点P_0沿方向$\boldsymbol{l}$的方向导数,记作

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0},\quad f_l(P_0),\quad f_l(x_0,y_0,z_0).$$

2. 若函数f在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$可微,则f在点P_0沿任一方向$\boldsymbol{l}$的方向导数都存在,且

$$f_l(P_0)=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta+f_z(P_0)\cos\gamma,$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是方向$\boldsymbol{l}$的方向余弦.

3. 若函数$f(x,y,z)$在点$P_0(x,y,z)$存在对各自变量的偏导数,则称向量$(f_x(P_0),f_y(P_0),f_z(P_0))$为函数$f$在点$P_0$的梯度,记作

$$\mathbf{grad}f=(f_x(P_0),f_y(P_0),f_z(P_0)),$$

向量 $\mathbf{grad}f$ 的模(长度)为

$$|\mathbf{grad}f| = \sqrt{f_x(P_0)^2 + f_y(P_0)^2 + f_z(P_0)^2}.$$

疑 难 解 析

1. 怎样用复合函数求导法则求导数?

答 多元复合函数的求导,关键是分析复合关系,即应搞清楚有几个复合层次,几个中间变量,中间变量又是几元函数.为了清晰明了地表示这些关系,最好画出"树形图",例如 $z=xy+xF(u)$,$u=y/x$,则其树形图如图 10.11 所示。然后利用树形图,按链式法则求导即可.

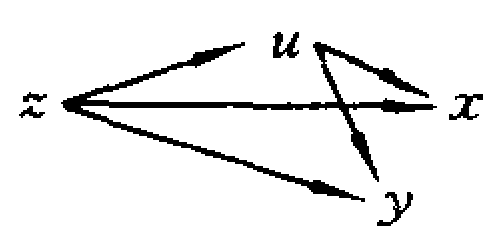


图 10.11

注意 若中间变量是一元函数,则求得的导数称为全导数,否则称为偏导数.

2. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿任一方向 l 的方向导数存在、可微、连续之间有什么关系?

答 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微是 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿任一方向 l 的方向导数存在的充分条件,而不是必要条件.例如

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < x^2, -\infty < x < +\infty, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

在点(0,0)不连续也不可微.但在从原点出发的任何射线上都存在包含原点的充分小一段,使得 $f=0$,故在原点沿任何方向 l 的方向导数都存在,且为 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=0$.可见,$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微和连续都不是方向导数存在的必要条件.

若 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿任何方向 l 的方向导数存在,则在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处偏导数存在.

3. 函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的梯度与在该点的方向导数有何关系？

答 因为梯度 $\mathbf{grad}f=(f_x(P_0),f_y(P_0))$，而分量 $f_x(P_0)$，$f_y(P_0)$ 是 f 沿 x 轴和 y 轴方向的方向导数. 梯度的模 $|\mathbf{grad}f|=\sqrt{f_x(P_0)^2+f_y(P_0)^2}$ 也与 f 沿 x 轴和 y 轴方向的方向导数有关.

若记 $\boldsymbol{l}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则

$$f_l(P_0)=\mathbf{grad}f(P_0)\cdot\boldsymbol{l}_0=|\mathbf{grad}f|\cos\theta.$$

其中 θ 是梯度向量 $\mathbf{grad}f(P_0)$ 与 $\boldsymbol{l}_0$ 的夹角，当 $\theta=0$ 时，$\cos\theta=1$，$f_l(P_0)$ 取最大值，最大值为 $|\mathbf{grad}f(P_0)|$. 因此，f 在点 P_0 可微时，f 在点 P_0 的梯度方向是 f 增长最快的方向；沿这一方向的变化率就是梯度的模. 而 $\boldsymbol{l}$ 与梯度向量方向相反时，方向导数取得最小值，最小值为 $-|\mathbf{grad}f(P_0)|$.

方法、技巧与典型例题分析

一、多元复合函数求导与全微分

多元复合函数求导，首先要弄清复合关系，然后要正确运用链式法则.

例 1 求下列函数的全导数：

(1) $z=uv+\sin t, u=e^t, v=\cos t$，求 dz/dt；

(2) $z=\arcsin(x-y), x=3t, y=4t^3$，求 dz/dt；

(3) $z=f(x,y), x=t+\sin t, y=\varphi(t)$，求 dz/dt.

解 此例中间变量都是 t 的一元函数，所以是求全导数.

(1) 复合关系如图 10.12(a)所示，故

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial t}=\cos t\cdot e^t-e^t\sin t+\sin t.$$

(2) 复合关系如图 10.12(b)所示，故

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1-(x-y)^2}} - \frac{12t^2}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$$

$$= \frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(x-y)^2}}.$$

(3) 复合关系如图 10.12(b)所示，故

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= f_x(x,y)(1-\cos t) + f_y(x,y)\varphi'(t).$$

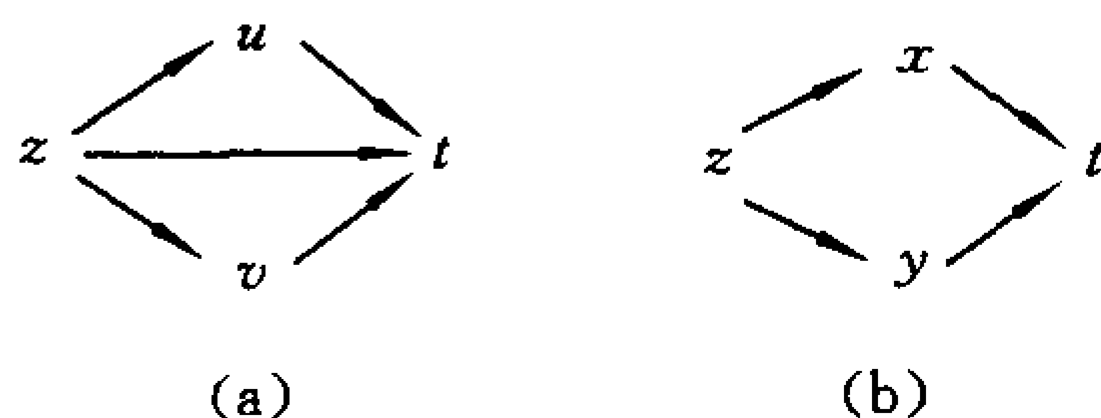


图 10.12

例 2 设函数 $f(x,y)$存在一阶连续偏导数，且 $f(1,1)=1$，$f'_1(1,1)=a, f'_2(1,1)=b$. 又 $\varphi(x)=f\{x,f[x,f(x,x)]\}$. 求 $\varphi(1)$ 和 $\varphi'(1)$.

解 $\varphi(1)=f\{1,f[1,f(1,1)]\}=f\{1,f(1,1)\}=f(1,1)=1.$

由 $$\varphi'(x)=f'_1\{x,f[x,f(x,x)]\} + f'_2\{x,f[x,f(x,x)]\}\{f'_1[x,f(x,x)] + f'_2[x,f(x,x)][f'_1(x,x)+f'_2(x,x)]\},$$

故 $$\varphi'(1)= f_1(1,1) + f_2(1,1)\{[f'_1(1,1)+f'_2(1,1)] \cdot [f'_1(1,1)+f'_2(1,1)]\}$$
$$= a + b[a+b(a+b)] = a+ab+ab^2+b^3.$$

例 3 (1) $z=u^2v-v^2u, u=x\cos y, v=x\sin y$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$；

(2) $z=e^u\sin v, u=xy, v=x+y$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$；

(3) $z=e^{\ln\sqrt{u^2+v^2}\cdot\arctan(u/v)}$，求$\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}$.

解 (1) 复合关系如图 10.13(a)所示，故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$=(2uv-v^2)\cos y+(u^2-2vu)\sin y$$
$$=3x^2\cos y\sin y(\cos y-\sin y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$=(2uv-v^2)(-x\sin y)+(u^2-2vu)x\cos y$$
$$=-2x^3\sin y\cos y(\sin y+\cos y)+x^3(\cos^3 y+\sin^3 y).$$

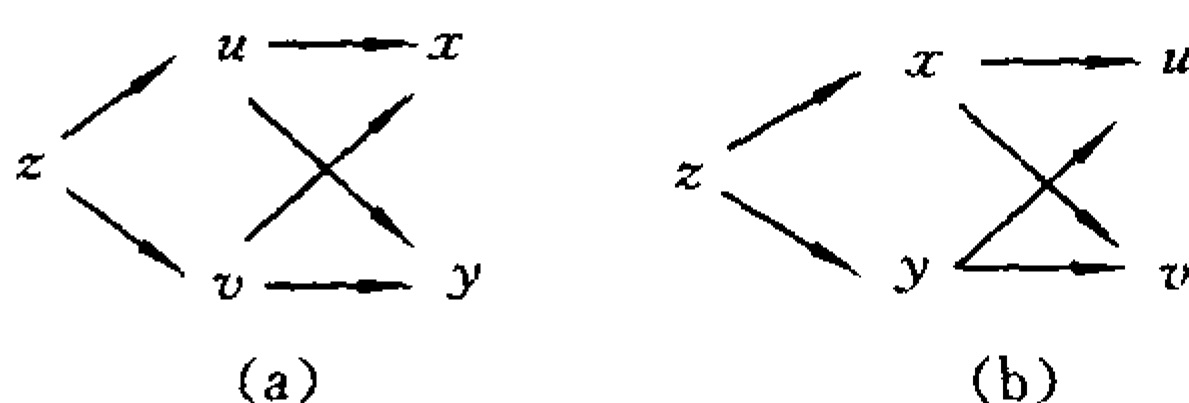


图 10.13

(2) 复合关系如图 10.13(a)所示,故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=y\mathrm{e}^u\sin v+\mathrm{e}^u\cos v$$
$$=\mathrm{e}^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)],$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=x\mathrm{e}^u\sin v+\mathrm{e}^u\cos v$$
$$=\mathrm{e}^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)].$$

(3) 设 $x=\ln\sqrt{u^2+v^2}$, $y=\arctan(u/v)$,则 $z=\mathrm{e}^{xy}$成为复合函数,复合关系如图 10.13(b)所示,故

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$=y\mathrm{e}^{xy}\frac{u}{u^2+v^2}+x\mathrm{e}^{xy}\frac{1}{1+(u/v)^2}\cdot\frac{1}{v}$$
$$=\mathrm{e}^{\ln\sqrt{u^2+v^2}\cdot\arctan(u/v)}\cdot\frac{u\arctan(u/v)+v\ln\sqrt{u^2+v^2}}{u^2+v^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$= ye^{xy}\frac{v}{u^2+v^2} + xe^{xy}\frac{-u}{1+(u/v)^2}$$

$$= e^{\ln\sqrt{u^2+v^2}\arctan(u/v)} \cdot \frac{v\arctan(u/v) - u\ln\sqrt{u^2+v^2}}{u^2+v^2}.$$

对于抽象函数形式的复合函数，一定要认真分析复合关系和步骤. 为简单起见，一般以下标来标记中间变量的顺序关系，以免出错.

例 4 设 $z=F(u,v,w)$，$v=f(u,x)$，$x=g(u,w)$，求 $\frac{\partial z}{\partial u}$，$\frac{\partial z}{\partial w}$.

解 复合关系如图 10.14 所示，故



图 10.14

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}u} + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u}\right)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial w}\right) + \frac{\partial F}{\partial w} = \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial w} + \frac{\partial F}{\partial w}.$$

例 5 设 $u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,e^y,z)=0$，$y=\sin x$，其中 f 和 φ 都有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z}=0$，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解 因为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos x$，而 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 要由隐函数方程解出. 对 $\varphi(x^2,e^y,z)=0$ 求导，得

$$\varphi_1' \cdot 2x + \varphi_2' \cdot e^y \cdot y_x' + \varphi_3'\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0,$$

即得
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{2x\varphi_1' + e^y\varphi_2'\cos x}{\varphi_3'},$$

故
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \cos x\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{2x\varphi_1' + e^y\varphi_2'\cos x}{\varphi_3'}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

例 6 求下列函数的偏导数：

(1) $z=x^3f(xy,\frac{y}{x})$，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial z}{\partial x}$；

(2) $u=f(x,y,z)$，$z=\varphi(y,t)$，$t=\psi(x,y)$，其中 f，φ 有一阶连续偏导数，ψ 可导，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$；

(3) $u=f(x,xy,xyz)$，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$；

(4) $z=f(x,u,v),u=u(x,y),v=v(x,y,u)$.

解 用乘积及复合导数求导法则求解.

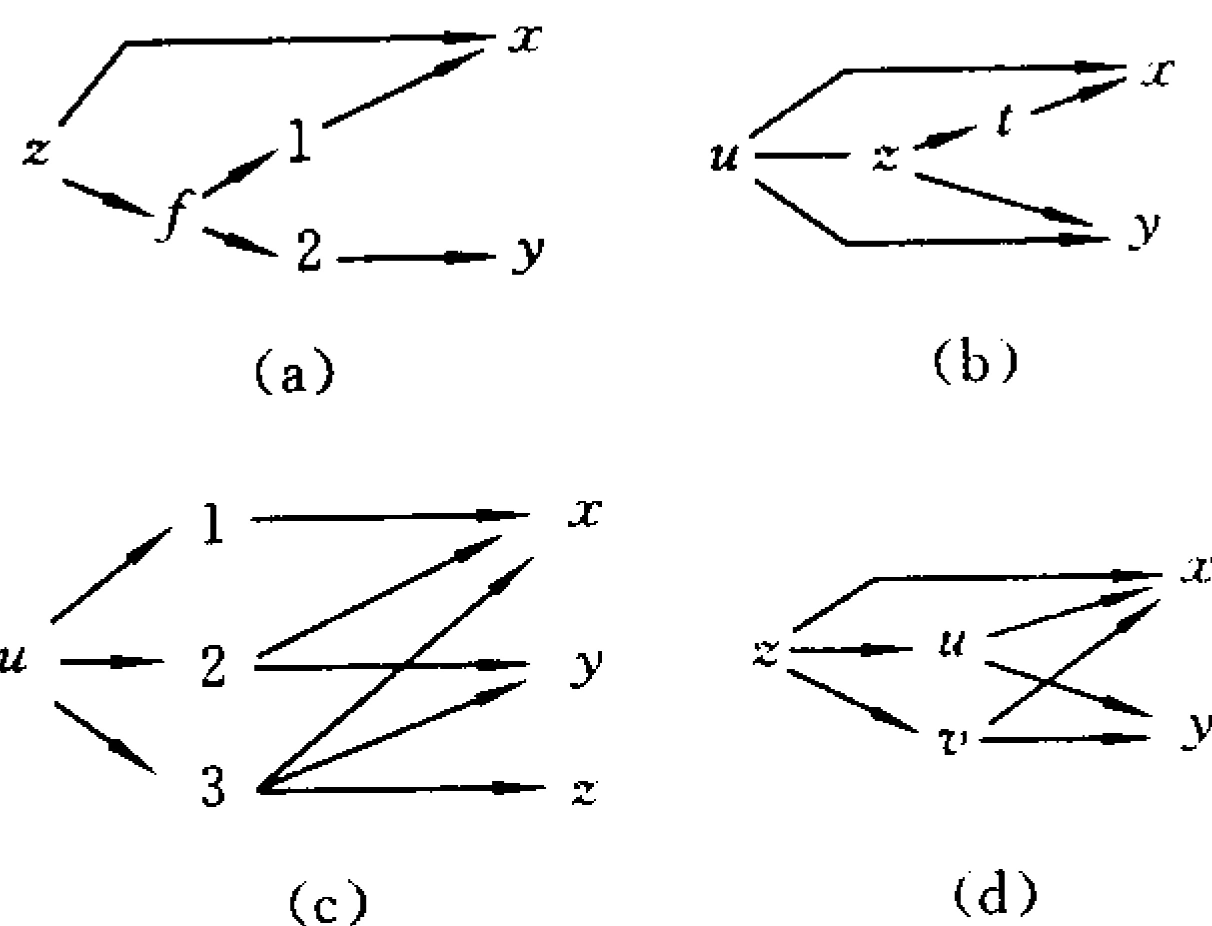


图 10.15

(1) 复合关系如图 10.15(a)所示，故

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3f_1'\cdot x+x^3f_2'\cdot\frac{1}{x}=x^4f_1'+x^2f_2',$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=3x^2f+x^3f_1'\cdot y+x^3f_2'\left(-\frac{y}{x^2}\right)\\&=3x^2f+x^3yf_1'-xyf_2'.\end{aligned}$$

(2) 复合关系如图 10.15(b)所示，故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\varphi_t'\cdot\psi_x',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}\right)=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}(\varphi_y'+\varphi_t'\cdot\psi_y').$$

(3) 复合关系如图 10.15(c)所示，故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_2'y+f_3'yz,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_2'x+f_3'xz,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=f_3'xy.$$

(4) 复合关系如图 10.15(d)所示，故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

例 7 证明：

(1) $z=\arctan\dfrac{x^3-y^3}{x-y}$是方程 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sin 2x$ 的一个解；

(2) $z=xy+xF(u)$，$u=\dfrac{y}{x}$，$F(u)$可导，满足方程 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+xy$；

(3) $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$，$f(u)$可导，满足方程$\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$.

证 只要求出偏导数代入验证即可.

(1) $$\frac{\partial z}{\partial x}=1\Big/\left[1+\left(\frac{x^3-y^3}{x-y}\right)^2\right]\cdot\frac{3x^2(x-y)-(x^3-y^3)}{(x-y)^2}$$
$$=\frac{2x^3-3x^2y+y^3}{(x-y)^2+(x^3-y^3)^2},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3-3xy^2+2y^3}{(x-y)^2+(x^3-y^3)^2},\quad \tan z=\frac{x^3-y^3}{x-y}.$$

代入得 $$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2(x-y)(x^3-y^3)}{(x-y)^2+(x^3-y^3)^2},$$

又有 $$\sin 2z=\frac{2\tan z}{1+\tan^2 z}=\frac{2(x-y)(x^3-y^3)}{(x-y)^2+(x^3-y^3)^2},$$

从而 $$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\sin 2z,$$

即 $z=\arctan\dfrac{x^3-y^3}{x-y}$是方程 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sin 2z$ 的解.

(2) $$\frac{\partial z}{\partial x}=y+F(u)+x\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=y+F(u)-\frac{y}{x}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+x\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}\left(\frac{1}{x}\right)=x+\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}.$$

代入得 $$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\left(y+F(u)-\frac{y}{x}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}\right)+y\left(x+\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}\right)$$
$$=xy+xF(u)+xy=z+xy.$$

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y\cdot f_u'\cdot 2x}{f^2(u)}=-\frac{2xyf_u'}{f^2(u)}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f(u)-yf_u'(-2y)}{f^2(u)}=\frac{1}{f(u)}+\frac{2y^2f_u'}{f^2(u)}.$$

代入得 $\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2yf_u'}{f^2(u)}+\frac{1}{y}\frac{1}{f(u)}+\frac{2yf_u'}{f^2(u)}$

$$=\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y/z}=\frac{z}{y^2}.$$

这里,运用了关系式 $f(u)=z/y$.

例 8 设 u 满足方程 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$,作变量代换 $\xi=x,\eta=y-x,\zeta=z-x$,证明:在新变量下,满足方程 $\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$.

证 因为 $x=\xi,y=\eta+x=\eta+\xi,z=\zeta+x=\zeta+\xi$,所以 $\frac{\partial x}{\partial \xi}=1$, $\frac{\partial y}{\partial \xi}=1,\frac{\partial z}{\partial \xi}=1$. 于是

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot 1$$
$$=0\cdot 1=0.$$

例 9 设 $x=\frac{1}{u}+\frac{1}{v},y=\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2},z=\frac{1}{u^3}+\frac{1}{v^3}+e^x$,求 dz.

解

$$dx=-\frac{1}{u^2}du-\frac{1}{v^2}dv, \quad ①$$

$$dy=-\frac{2}{u^3}du-\frac{2}{v^3}dv, \quad ②$$

$$dz=-\frac{3}{u^4}du-\frac{3}{v^4}dv+e^x dx. \quad ③$$

由式②解得 $du=-\frac{u^3}{2}dy-\frac{u^3}{v^3}dv$,

代入式①得 $dx=\frac{u}{2}dy+\frac{u-v}{v^3}dv$.

再将 du,dx 代入式③,得

$$dz=\left(\frac{3}{2u}+\frac{ue^x}{2}\right)dy+\left(\frac{3}{uv^3}+\frac{u-v}{v^3}e^x-\frac{3}{v^4}\right)dv.$$

例 10 若$\forall\ t>0$，n 为整数，关系式 $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$ 恒成立，则称 f 是 n 次齐次函数. 证明：n 次齐次函数一定满足关系式

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf(x,y).$$

证 令 $u=tx$，$v=ty$，则$\frac{\partial u}{\partial t}=x$，$\frac{\partial v}{\partial t}=y$. 对 $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$ 两边关于 t 求导，得

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}=nt^{n-1}f(x,y),$$

即
$$x\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v}=nt^{n-1}f(x,y).$$

两边乘以 t，得

$$tx\frac{\partial f}{\partial u}+ty\frac{\partial f}{\partial v}=nt^n f(x,y),$$

即
$$u\frac{\partial f}{\partial u}+v\frac{\partial f}{\partial v}=nf(tx,ty)=nf(u,v),$$

更换字母，得 $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf(x,y)$.

此公式可以推广到 m ($m\geqslant 2$)元函数情形.

二、方向导数与梯度

求方向导数的关键是正确求出偏导数与 $\boldsymbol{l}$ 的方向向量，要正确使用公式 $\boldsymbol{l}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{\Delta x}{\rho},\frac{\Delta y}{\rho},\frac{\Delta z}{\rho}\right)$，要明确$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$中的 $\boldsymbol{l}$ 不是变量，$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$只是导数形式(为简便起见，可将$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$写成$\frac{\partial f}{\partial l}$).

例 11 求下列函数的方向导数：

(1) $f(x,y)=x^2-y^2$ 在点(1,1)沿与 x 轴正向成 60°角方向的方向导数；

(2) $f(x,y,z)=xy^2+yz^3$ 在点(1,2,1)沿 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ 的方向导数；

(3) $f(x,y,z)=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$在点 $A(1,0,1)$沿 A 指向点 $B(3,-2,2)$的方向导数.

解 (1) 因为 $\alpha=60^{\circ}$,所以 $\boldsymbol{l}_0=\left(1/2, \sqrt{3}/2\right)$.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2x\mid_{(1,1)}=2, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=-2y\mid_{(1,1)}=-2.$$

故
$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-2)=1-\sqrt{3}.$$

(2) $\boldsymbol{l}_0=\left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right)$, $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2,1)}=y^2\mid_{(2)}=4$,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,2,1)}=(2xy+z^3)\mid_{(1,2,1)}=5,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,2,1)}=3yz^2\mid_{(1,2,1)}=6,$$

故
$$\frac{\partial f}{\partial l}=4\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}+5\cdot\frac{2}{\sqrt{30}}+6\cdot\frac{5}{\sqrt{30}}=\frac{44}{\sqrt{30}}.$$

(3) $\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$, $|\overrightarrow{AB}|=3$, $\boldsymbol{l}_0=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,0,1)}=\left.\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2},$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,0,1)}=\left.\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{(1,0,1)}=0,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,0,1)}=\left.\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2},$$

故
$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot 0+\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

例 12 设 $f(x,y)$ 在点 P_0 可微, $\boldsymbol{l}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\boldsymbol{l}_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\frac{\partial f(P_0)}{\partial l_1}=1$, $\frac{\partial f(P_0)}{\partial l_2}=0$,确定 $\boldsymbol{l}$,使得

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial l}=\frac{7}{5\sqrt{2}}.$$

解 设 $\boldsymbol{l}_0=(\cos\theta,\sin\theta)$,则由题设得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial l_1} = \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x}\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial y}\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 1, \\ \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial l_2} = \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial y}\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0, \end{cases}$$

解方程组，得 $$\frac{\partial f(P_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

于是 $$\frac{\partial f(P_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\sin\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta + \sin\theta) = \frac{7}{5\sqrt{2}},$$

即 $$\cos\theta + \sin\theta = \frac{7}{5} \Rightarrow \cos\theta\sin\theta = \frac{12}{25}.$$

构造方程 $$x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{12}{25} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = \frac{4}{5}.$$

即得 $$\cos\theta = \frac{3}{5} \text{或} \frac{4}{5}, \quad \sin\theta = \frac{4}{5} \text{或} \frac{3}{5}.$$

故所求方向 $$\boldsymbol{l}_0 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \quad \text{或} \quad \boldsymbol{l}_0 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

例 13 设 $f(x,y)$ 在点 $P_0(2,0)$ 处沿 $\boldsymbol{l}_1=(2,-1)$ 方向的方向导数是 1，沿 $\boldsymbol{l}_2=(-2,0)$ 方向的方向导数是 -3，求 f 沿 $\boldsymbol{l}=(3,2)$ 方向的方向导数.

解 因为 $\boldsymbol{l}_{1_0} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$\boldsymbol{l}_{2_0} = (-1, 0)$，$\boldsymbol{l}_0 = \left(\dfrac{3}{\sqrt{13}}, \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$，所以，由题设按公式有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial l_1} = \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x}\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial y}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1, \\ \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial l_2} = \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x}(-1) + \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial y}(0) = -3, \end{cases}$$

解方程组，得 $$\frac{\partial f(P_0)}{\partial x} = 3, \quad \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} = 3 - \sqrt{2}.$$

于是 $$\frac{\partial f(P_0)}{\partial l} = 3 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} + (3 - \sqrt{2})\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{15 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}.$$

例 14 (1) 求函数 $z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$ 在点 $P\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在该点内法线方向上的方向导数；

(2) 求函数 $u=xyz$ 在点 $M(3,4,5)$ 沿锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的法线方向的方向导数.

解 (1) 求内法线的方向余弦，需先求曲线切线的斜率和内法线的斜率. 因为椭圆的切线方程为 $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=0$，所以，过点 P 的切线方程为 $\frac{x}{\sqrt{2}a}+\frac{y}{\sqrt{2}b}=0$，于是 $\tan\alpha=-\frac{b}{a}\Rightarrow$ 内法线斜率 $\tan\theta=\frac{a}{b}$. 故

$$\boldsymbol{l}_0=\left(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

而 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P=-\left.\frac{2x}{a^2}\right|_P=-\frac{\sqrt{2}}{a}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P=-\left.\frac{2y}{b^2}\right|_P=-\frac{\sqrt{2}}{b}$.

得
$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_P=-\frac{\sqrt{2}}{a}\cdot\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{b}\cdot\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{ab}\sqrt{a^2+b^2}.$$

(2) 求出锥面的法向量 $\boldsymbol{n}=\pm\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right)$ 在点 M 有 $\boldsymbol{n}=\pm\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},-1\right)$，故在点 M 有

$$\boldsymbol{n}_0=\pm\left(\frac{3\sqrt{2}}{10},\frac{2\sqrt{2}}{5},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

而 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=yz\mid_M=20$，$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=xz\mid_M=15$，$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=xy\mid_M=12$.

于是

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_M=\pm\left[20\cdot\frac{3\sqrt{2}}{10}+15\cdot\frac{2\sqrt{2}}{5}+12\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

$=\pm 6\sqrt{2}.$

例 15 在 xoy 平面上存在温度场 $T=4x^2+9y^2$.

(1) 求在点 $P(9,4)$ 沿方向角为 210°的方向 $\boldsymbol{l}$ 的温度变化率;

(2) 在什么方向上,点 P 的温度变化率取得最大值?并求出最大值.

解 (1) 依题意,求温度变化率就是求方向导数 $\left.\frac{\partial T}{\partial l}\right|_P$.

$$\left.\frac{\partial T}{\partial l}\right|_P=\left.\left(\frac{\partial T}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial T}{\partial y}\sin\alpha\right)\right|_P$$
$$=(\cos 210°\cdot 8x+\sin 210°\cdot 18y)\ |_P$$
$$=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 72+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 72=-36(1+\sqrt{3}).$$

(2) 梯度方向是变化率最大的方向.

$$\mathbf{grad}T\ |_P=\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_P\boldsymbol{i}+\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_P\boldsymbol{j}=72\boldsymbol{i}+72\boldsymbol{j}.$$

此时,$\tan\alpha=1$,方向角 $\alpha=45°$,温度变化率的最大值为

$$|\mathbf{grad}T|=\sqrt{72^2+72^2}=72\sqrt{2}.$$

例 16 求函数 $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ 在点 $M(x,y,z)$ 沿 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 方向的方向导数,并讨论在哪些点的方向导数等于梯度的大小,考虑:(1) a,b,c 两两不相等;(2) $a=b\neq c$;(3) $a=b=c$.

解 $\mathbf{grad}u=\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\right)$, $\boldsymbol{r}_0=\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)$,

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

故
$$\frac{\partial u}{\partial r}=\mathbf{grad}u\cdot\boldsymbol{r}_0=\frac{2}{r}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right).$$

(1) 当 a,b,c 两两不相等时,等值面为椭球面 $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=k$ (k 为常数). 梯度方向为等值面的法线方向,由低值面指向高值面. 在点$(0,0,\pm c\sqrt{c})$,$(0,\pm b\sqrt{b},0)$,$(\pm a\sqrt{a},0,0)$等 6

个点的法线方向与矢径 $\boldsymbol{r}$ 方向相同，有 $\frac{\partial u}{\partial r}=|\mathbf{grad}u|$.

(2) 当 $a=b\neq c$ 时，等值面为旋转椭球面. 在等值面的两个顶点 $(0,0,\pm c\sqrt{c})$ 及等值面与 $z=0$ 的平面的交线 $x^2+y^2=\lambda a^2, z=0$ 上，梯度方向与 $\boldsymbol{r}$ 方向相同，$\frac{\partial u}{\partial r}=|\mathbf{grad}u|$.

(3) 当 $a=b=c$ 时，等值面为球面. 球面上每一点的外法线方向与矢径 $\boldsymbol{r}$ 方向相同，即球面上处处有 $\frac{\partial u}{\partial r}=|\mathbf{grad}u|$.

例 17 函数 $f(x,y)$ 在点 $P(2,0)$ 沿 $\boldsymbol{l}_1=(2,-2)$ 方向的方向导数是 $2\sqrt{2}$，沿 $\boldsymbol{l}_2=(-2,0)$ 方向的方向导数是 -2. 求 f 在点 P 沿 $\boldsymbol{l}=(3,2)$ 方向的方向导数.

解 $\boldsymbol{l}_{1_0}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$\boldsymbol{l}_{2_0}=(-1,0)$，$\boldsymbol{l}_0=\left(\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

由
$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(P)}{\partial l_1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(a-b)=2\sqrt{2},\\[2mm] \dfrac{\partial f(P)}{\partial l_2}=-a=-2,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2,\\ b=-2.\end{cases}$$

这里设 $\mathbf{grad}P=(a,b)$，故 $\mathbf{grad}f=(2,-2)$. 从而得

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot 2+\frac{2}{\sqrt{13}}\cdot(-2)=\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

第五节　泰勒公式与极值问题

主 要 内 容

1. 如果函数 $f(x,y)$ 在域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上有一阶偏导数，f'_x, f'_y 是 x,y 的二元函数，若它们的偏导数也存在，则称之为 $f(x,y)$ 的二

阶偏导数.

一般定义函数的 n 阶偏导数的偏导数(若存在)为 $n+1$ 阶偏导数. 一般地, m 元函数的 n 阶偏导数可以有 m^n 个.

2. 如果函数 $f(x,y)$ 的两个混合偏导数 f_{xy} 和 f_{yx} 在点 (x_0,y_0) 连续, 则等式 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$ 成立.

此结论可以推广到 n 元函数情形.

3. 如果函数 $f(x,y)$ 在域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上可微, $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$, 则称 $\mathrm{d}z$ 的微分为 z 的二阶微分 $\mathrm{d}^2z=\mathrm{d}(\mathrm{d}z)$.

类似地, 有 $\mathrm{d}^kz=\mathrm{d}(\mathrm{d}^{k-1}z)$. 二阶及二阶以上微分统称为高阶微分.

4. 中值定理　设二元函数 f 在凸区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上连续, 在 D 的所有内点都可微, 则对 D 内任意两点 $P(a,b), Q(a+h,b+k)\in \mathrm{int}D$, 存在某 θ $(0<\theta<1)$, 使得

$$
\begin{aligned}
&f(a+h,b+k)-f(a,b)\\
&=f_x(a+\theta h,b+\theta k)h+f_y(a+\theta h,b+\theta k)k.
\end{aligned}
$$

5. 泰勒定理　若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的邻域 $U((x_0,y_0);\delta)$ 有直到 $n+1$ 阶的连续偏导数, 则对 $U((x_0,y_0);\delta)$ 内任一点 (x_0+h,y_0+k) 存在相应的 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+h,y_0+k)\\
&=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)\\
&\quad+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x_0,y_0)+\cdots\\
&\quad+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^nf(x_0,y_0)\\
&\quad+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)
\end{aligned}
$$

6. 设函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 有定义, 若对于任何点 $P(x,y)\in U(P_0)$, 不等式 $f(P)\leqslant f(P_0)$ (或 $f(P)\geqslant$

$f(P_0)$)成立,则称函数 f 在点 P_0 取得极大值(或极小值). 点 P_0 称为 f 的极大值点(或极小值点).

7. 极值必要条件　若函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$存在偏导数,且在 P_0 取得极值,则有

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0.$$

若函数 f 在点 P_0 满足以上两个等式,则称 P_0 为 f 的稳定点(或驻点、静止点).

若函数 f 存在二阶连续偏导数,则称矩阵

$$H_f(P_0)=\begin{bmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{P_0}$$

为函数 f 在 P_0 的黑塞(Hesse)矩阵.

8. 极值充分条件　设 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的某邻域 $U(P_0)$内存在二阶连续偏导数,且 P_0 是 f 的稳定点,则当 $H_f(P_0)$是正定矩阵时,f 在 P_0 取得极小值;当 $H_f(P_0)$是负定矩阵时,f 在 P_0 取得极大值;当 $H_f(P_0)$是不定矩阵时,f 在 P_0 无极值.

极值必要条件与充分条件均可推广到 n 元函数情形.

疑难解析

1. 写出求 $C^{(2)}$类函数 f 的极值的步骤(若 f 在 I 上有 n 阶连续的导数,则称 f 为 $C^{(n)}$类函数).

答　首先求出 f 的所有稳定点 P_0;然后求出 f 在 P_0 的黑塞矩阵,判定黑塞矩阵的类型;最后确定 $f(P_0)$是极大值、极小值,或不是极值.

若 $z=f(x,y)$,令 $f_{xx}(P_0)=A$,$f_{xy}(P_0)=B$,$f_{yy}(P_0)=C$,则 $H_f(P_0)=\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$,于是

(1) 若 $A>0$,$AC-B^2>0$(即 $H_f(P_0)$正定),则 $f(P_0)$为极小值;

(2) 若 $A<0, AC-B^2>0$（即 $H_f(P_0)$ 负定），则 $f(P_0)$ 为极大值；

(3) 若 $AC-B^2<0$（即 $H_f(P_0)$ 不定），则 $f(P_0)$ 不是极值；

(4) 若 $AC-B^2=0$，不能肯定 f 在点 P_0 是否有极值.

方法、技巧与典型例题分析

一、高阶偏导数与全微分

求高阶偏导数与全微分没有什么新的方法，一般用逐阶求导法. 应注意微分形式不变性已不复存在，并注意求导时不要增项和丢项，以保证运算的正确.

例 1 求下列函数的高阶导数：

(1) $z=e^x(\cos y+x\sin y)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$；

(2) $z=x\ln(x,y)$，求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$；

(3) $z=\frac{1}{x}f(x,y)+y\varphi(x+y)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

(4) $z=f(e^x\sin y, x^2+y^2)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 此例中的 f,φ 均有二阶连续偏导数.

(1) $\frac{\partial z}{\partial x}=e^x[\cos y+(x+1)\sin y], \frac{\partial z}{\partial y}=e^x(-\sin y+x\cos y)$，

故
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}= e^x[\cos y + (x + 1)\sin y] + e^x\sin y$$
$$= e^x[\cos y + (x + 2)\sin y],$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = e^x[- \sin y + (x + 1)\cos y] = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}= e^x(- \cos y - x\sin y) =- e^x(\cos y + x\sin y).$$

(2) $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x}{y^2}$，故

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=0, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}=-\frac{1}{y^2}.$$

(3) 因为$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(x,y)+y\varphi'(x+y)$，所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}&=-\frac{1}{x^2}f'(xy)x+\frac{1}{x}f'(xy)+\frac{y}{x}f''(xy)\cdot x\\&\quad+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)\\&=yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y).\end{aligned}$$

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'e^x\sin y+2xf_2'$，故

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}&=f_{11}''e^{2x}\sin y\cos y+2e^x f_{12}''(y\sin y+x\cos y)\\&=4xyf_{xy}''+f_1'e^x\cos y.\end{aligned}$$

例 2 求变上限函数 $f(x,y)=\int_0^{xy}e^{-t^2}dt$ 的关系式

$$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

解 $$\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{-(xy)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=xe^{-(xy)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2xy^3e^{-(xy)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x^3ye^{-(xy)^2},$$

故 $$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2e^{-(xy)^2}.$$

例 3 求下列函数指定阶的偏导数：

(1) $u=x^3\sin y+y^3\sin x$，求$\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}$；

(2) $u=\arctan\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$，求$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$；

(3) $f(x,y)=e^x\sin y$，求 $f_{x^m y^n}^{(m+n)}(0,0)$.

解 (1) $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2\sin y+y^3\cos x$， $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x\sin y-y^3\sin x$，

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=6\sin y-y^3\cos x, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}=6\cos y-3y^2\cos x,$$

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} = -6\sin y - 6y\cos x, \quad \frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3} = -6(\cos y + \cos x).$$

(2) $u = \arctan x + \arctan y + \arctan z + \varepsilon\pi\ (\varepsilon = 0, \pm 1)$,

所以
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0.$$

(3) $f_{x^m}^{(m)} = e^x \sin y, f_{x^m y^n}^{(m+n)} = e^x \sin(y + n\pi/2)$,

所以
$$f_{x^m y^n}^{(m+n)}(0,0) = e^0 \sin(n\pi/2) = \sin(n\pi/2).$$

例 4 求下列函数的高阶全微分:

(1) $u = \ln(x^x y^y z^z)$,求 $d^4 u$; (2) $u = e^{ax+by}$,求 $d^n u$;

(3) $u = x^p y^q z^r$,求 $d^n u$,并由此证明

$$d^n P_n(x,y,z) = n! P_n(dx, dy, dz).$$

解 (1) $u = x\ln x + y\ln y + z\ln z$,故

$$\begin{aligned} d^4 u &= (x\ln x)^{(4)} dx^4 + (y\ln y)^{(4)} dy^4 + (z\ln z)^{(4)} dz^4 \\ &= 2\left(\frac{dx^4}{x^3} + \frac{dy^4}{y^3} + \frac{dz^4}{z^3}\right). \end{aligned}$$

(2) 因为 $d(ax+by) = a dx + b dy, d^2(ax+by) = 0$,故

$$d^n u = d^n(e^{ax+by}) = e^{ax+by}[d(ax+by)]^n = e^{ax+by}(a dx + b dy)^n.$$

(3) $d(x^p y^q z^r) = C_n^{p+q} d^{p+q}(x^p y^q) \cdot d^r(z^r)$

$$\begin{aligned} &= \frac{n!}{r!\ (p+q)!}[C_{p+q}^p d^p(x^p) d^q(y^q) d^r(z^r)] \\ &= \frac{n!}{r!\ (p+q)!} \frac{(p+q)!}{p!\ q!} p!\ q!\ r!\ dx^p dy^q dz^r \\ &= n!\ dx^p dy^q dz^r. \end{aligned}$$

而 $P_n(x,y,z)$ 是 n 次齐次多项式,可表示为形如 $Ax^p y^q z^r$ 的若干个单项式的和,其中 A 是常数.

由 $d^n(x^p y^q z^r) = n!\ dx^p dy^q dz^r$ 立即可得

$$d^n P_n(x,y,z) = n! P_n(dx, dy, dz).$$

例 5 求下列函数指定阶的全微分:

(1) $u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$,求 $d^2 u$;

(2) $u = f(\xi, \eta), \xi = xy, \eta = x/y$,求 $d^2 u$;

(3) $u=f(x,y,z), x=t, y=t^2, z=t^3$，求 d^2u；

(4) $u=f(\xi,\eta,\zeta), \xi=a_1x+b_1y+c_1z, \eta=a_2x+b_2y+c_2z$，$\zeta=a_3x+b_3y+c_3z$，求 d^nu.

解 (1) $du=f'\frac{xdx+ydx}{\sqrt{x^2+y^2}}$，故

$$d^2u=f''\frac{(xdx+ydy)^2}{x^2+y^2}+f'\frac{(ydx-xdy)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

(2) $du=f'_1(ydx+xdy)+f'_2\frac{ydx-xdy}{y^2}$，故

$$d^2u=f''_{11}(ydx+xdy)^2+f''_{22}\frac{(ydx-xdy)^2}{y^4}$$
$$+2f''_{12}\frac{y^2dx^2-x^2dy^2}{y^2}+2f'_1dxdy-2f'_2\frac{(ydx-xdy)dy}{y^3}.$$

(3) $du=(f'_1+2tf'_2+3t^2f'_3)dt$，故

$$d^2u=(f''_{11}+4t^2f''_{22}+qt^4f''_{33}+4tf''_{12}+6t^2f''_{13}$$
$$+12t^3f''_{23}+2f'_2+6tf'_3)dt.$$

(4) d^nu

$$=\left[(a_1dx+b_1dy+c_1dz)\right]\frac{\partial}{\partial\xi}+(a_2dx+b_2dy+c_2dz)\frac{\partial}{\partial\eta}$$
$$+(a_3dx+b_3dy+c_3dz)\frac{\partial}{\partial\zeta}\Big]^n\cdot f(\xi,\eta,\zeta)$$
$$=\left[\left(a_1\frac{\partial}{\partial\xi}+a_2\frac{\partial}{\partial\eta}+a_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)dx+\left(b_1\frac{\partial}{\partial\xi}+b_2\frac{\partial}{\partial\eta}+b_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)dy\right.$$
$$\left.+\left(c_1\frac{\partial}{\partial\xi}+c_2\frac{\partial}{\partial\eta}+c_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)dz\right]^n\cdot f(\xi,\eta,\zeta).$$

二、泰勒公式

函数的泰勒公式可以用求偏导数的方法直接依公式求出，这是比较麻烦的；也可以利用一元函数泰勒公式或幂级数的展开式来求，这比较方便和简捷. 更重要的是要学会如何利用泰勒公式解决实际问题.

例 6 在点 $A(1,1,1)$ 的邻域内依泰勒公式将下列函数展开至二次项：

$$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

解 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3yz$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3xz$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}=3z^2-3xy$;

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=6z$;

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3z$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=-3x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=-3y$.

求出在点(1,1,1)的值,得

$$f(1,1,1)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=6,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=-3,$$

故 $$f(x,y,z)=3[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-(x-1)(y-1)-(x-1)(z-1)-(y-1)(z-1)]+o(\rho^2).$$

事实上,高于三阶的偏导函数都等于零,故本例中,$o(\rho^2)=0$.

例 7 求下列函数在指定点的二阶泰勒公式:

(1) $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$,在点 $P(1,-2)$;

(2) $f(x,y)=\sin x\sin y$,在点 $P(\pi/4,\pi/4)$.

解 (1) $f_x(P)=(4x-y-6)|_P=0$,

$$f_y(P)=(-x-2y-3)\ |_P=0,$$

$$f_{xx}(P)=4,\quad f_{xy}(P)=-1,\quad f_{yy}(P)=-2,$$

而所有三阶偏导数都为零. 所以,所求二阶泰勒公式为

$$f(x,y)=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2.$$

(2) 因为 $f(P)=\dfrac{1}{2}$, $f_x(P)=\cos x\sin y\ |_P=\dfrac{1}{2}$,

$$f_y(P)=\sin x\cos y\ |_P=\frac{1}{2},\quad f_{xx}(P)=-\sin x\sin y\ |_P=-\frac{1}{2},$$

$$f_{xy}(P)=\cos x\cos y\ |_P=\frac{1}{2},\quad f_{yy}(P)=-\sin x\sin y\ |_P=-\frac{1}{2},$$

所以,所求二阶泰勒公式为

$$f(x,y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2+o(\rho^2),$$

其中
$$\rho=\sqrt{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2}.$$

例 8 依据麦克劳林公式将下列函数展开至四次项：

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

解 因为$(1+x)^{1/2}=1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\cdots$，所以

$$f(x,y)=[1+(-x^2-y^2)]^{1/2}\approx 1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{8}(x^2+y^2)^2.$$

例 9 若$|x|\ll 1$，$|y|\ll 1$，求下列函数的近似公式：

(1) $\frac{\cos x}{\cos y}$； (2) $\arctan\frac{1+x+y}{1-x+y}$； (3) $(1+x)^m(1+y)^n$.

解 利用一元函数的麦克劳林公式求解.

(1)
$$\frac{\cos x}{\cos y}=\cos x(1-\sin^2 y)^{-1/2}$$
$$=\left(1-\frac{x^2}{2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{2}\sin^2 y+\cdots\right)$$
$$\approx\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\sin^2 y\right)\approx\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\left(1-\frac{y^2}{2}\right)$$
$$\approx 1-\frac{1}{2}(x^2-y^2).$$

(2)
$$\arctan\frac{1+x+y}{1-x+y}=\arctan\frac{1+x/(1+y)}{1-x/(1+y)}$$
$$=\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{x}{1+y}=\frac{\pi}{4}+\left(\frac{x}{1+y}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+y}\right)^3+\cdots$$
$$\approx\frac{\pi}{4}+x(1-y+y^2)\approx\frac{\pi}{4}+x-xy.$$

(3)
$$(1+x)^m(1+y)^n=(1+mx+\cdots)(1+ny+\cdots)$$
$$\approx 1+mx+ny.$$

例 10 求下列函数的麦克劳林级数：

(1) $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n$； (2) $f(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y$；

(3) $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$； (4) $f(x,y)=\int_0^1(1+x)^{t^2y}\mathrm{d}t$.

解 利用一元函数的麦克劳林级数求解.

(1) $(1+x)^m(1+y)^n$

$$=\left[1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\right]\left[1+ny+\frac{n(n-1)}{2!}y^2+\cdots\right]$$

$$=1+(mx+ny)+\frac{1}{2!}[m(m-1)x^2+2mnxy+n(n-1)y^2]$$

$$+\cdots,\ |x|<1,|y|<1.$$

(2) $$\mathrm{e}^x\cos y=\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^m y^{2n}}{m!(2n)!},$$

$$|x|<+\infty,|y|<+\infty.$$

(3) $\sin(x^2+y^2)$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2+y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{2n+1}\frac{x^{2k}y^{2(2n+1-k)}}{k!(2n+1-k)!}$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\left(\sin\frac{n+m}{2}\pi\right)\frac{x^{2n}y^{2m}}{m!n!},\ x^2+y^2<+\infty.$$

(4) $(1+x)^{t^2y}=\mathrm{e}^{t^2y\ln(1+x)}$

$$\approx 1+t^2y\ln(1+x)+[t^2y\ln(1+x)]^2/2!$$

$$\approx 1+t^2y(x-x^2/2)=1+t^2xy-t^2x^2y/2,$$

故 $$f(x,y)\approx\int_0^1\left(1+t^2xy-\frac{t^2}{2}x^2y\right)\mathrm{d}t=1+\frac{1}{3}y\left(x-\frac{x^2}{2}\right).$$

例 11 设圆心为 $P(x,y)$，半径为 ρ，$f(P)=f(x,y)$，$P_i(x_i,y_i)$，$i=1,2,3$ 为圆内接正三角形的三个顶点，且 $x_1=x+\rho$，$y_1=y$. 依 ρ 的正整数幂把函数

$$F(\rho)=\frac{1}{3}[f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)]$$

展开，准确到 ρ^3.

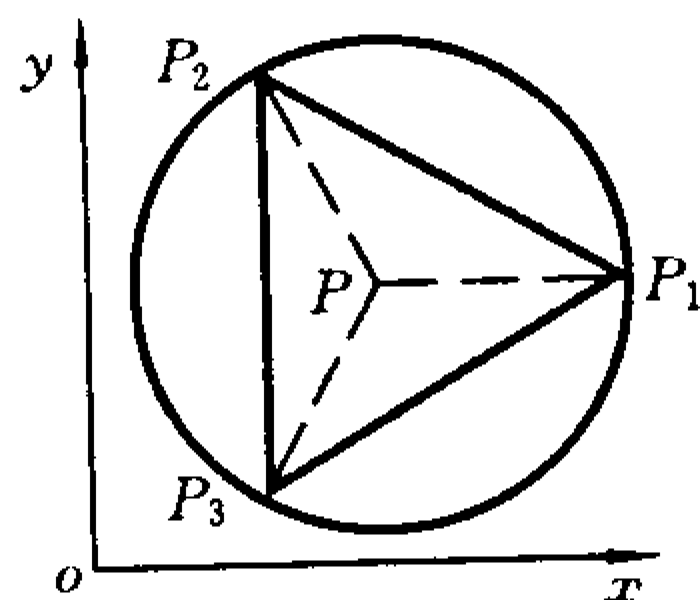


图 10.16

解 如图 10.16 可知

$$P_1(x+\rho,y),\quad P_2(x-\rho/2,y+\sqrt{3}\rho/2),$$
$$P_3(x-\rho/2,y-\sqrt{3}\rho/2),$$

$$\begin{aligned}F(\rho)&=\frac{1}{3}[f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)]\\&\approx\frac{1}{3}\left\{\left[f(P)+\rho\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\rho^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]+\left[f(P)+\left(-\frac{\rho}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial x}\right.\right.\\&\quad\left.+\frac{\sqrt{3}\rho}{2}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{3\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{\sqrt{3}\rho^2}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right]\\&\quad+\left[f(P)-\frac{\rho}{2}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\sqrt{3}\rho}{2}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right.\\&\quad\left.\left.+\frac{3\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\sqrt{3}\rho^2}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right]\right\}\\&=f(P)+\frac{\rho^2}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).\end{aligned}$$

例 12 求函数 $f(x,y)=x/y$ 在点(1,1)邻域的带皮亚诺余项的泰勒公式.

解 将函数变形后利用一元函数泰勒公式求解.

$$\begin{aligned}\frac{x}{y}&=\frac{1+(x-1)}{1+(y-1)}=[1+(x-1)]\frac{1}{1+(y-1)}\\&=[1+(x-1)]\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^n(y-1)^n+o(y-1)^n)\right]\\&=1+(x-1)-(y-1)-(x-1)(y-1)\\&\quad+(y-1)^2+\cdots+(-1)^{n-1}(x-1)(y-1)^{n-1}\\&\quad+(-1)^n(y-1)^n+o(\rho^n),\end{aligned}$$

其中
$$\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}.$$

三、无条件极值与最值

无条件极值又称为无约束极值，一般只要求出偏导数，确定稳定点，通过判别黑塞矩阵正定、负定或不定，即可确定函数的极大值、极小值或判定函数有无极值. 最值问题要考虑闭区域和开区域情形. 闭区域情形不仅要求出区域内极值，还要讨论边界上的最

值，通过比较确定闭区域上的最值；开区域情形只要比较区域内极值的大小就行.

例 13 求函数 $f(x,y)=2(y-x^2)^2-x^7/7-y^2$ 的极值，并证明在过点(0,0)的直线上，点(0,0)是直线上函数的极小值点.

解 因为
$$f_x'=-8x(y-x^2)-x^6=0,$$
$$f_y'=4(y-x^2)-2y=0,$$
解得 $x_1=0,y_1=0$ 和 $x_2=-2,y_2=8$.

由 $f_{xx}''=-8y+24x^2-6x^5,f''_{xy}=-8x,f''_{yy}=2$，得
$$H_f(-2,8)=\begin{pmatrix}224 & 16\\ 16 & 2\end{pmatrix},\Delta_1=224>0,\Delta_2=192>0.$$
所以，点(−2,8)为极小值点，极小值 $f(-2,8)=-352/7$.

对点(0,0)，黑塞矩阵无法判别，与周围点比较知，点(0,0)不是极值点.

在直线 $y=kx$ 上，$f(x,kx)=x^2(k^2-4kx+2x^2-x^5/7)$. 若 $k\neq0$，则当 x 充分小时，有 $f(x,kx)\geqslant0$；若 $k=0$，$f(x,0)=x^4(2-x^3/7)$，则当 x 充分小时，也有 $f(x,0)\geqslant0$. 故得出，在直线 $y=kx$ 上，函数在点(0,0)有极小值.

例 14 求下列函数的极值：

(1) $z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$；　　(2) $z=xe^{y+x\sin y}$；

(3) $z=e^{2x}(x+y^2+2y)$.

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}$,
$$\frac{\partial z}{\partial y}=2y(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)},$$
令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，求得稳定点为点(0,0)及 $x^2+y^2=1$ 上的点. 因为，在点(0,0)，有
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=A=2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=C=2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=B=0,$$
由 $AC-B^2=4>0,A>0$ 知，$z(0,0)=0$ 为极小值.

令 $x^2+y^2=t$，则 $z=te^{-t}$. 由于 $z_t'=e^{-t}(1-t)$，故 $t=x^2+y^2=1$ 为驻点. 又由于 $z_t''=(t-2)e^{-t}$，$z_t''(1)=-e^{-1}<0$，故 $z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ 在 $x^2+y^2=1$ 取得极大值 e^{-1}.

(2) $\begin{cases} f_x'=e^{y+x\sin y}(1+x\sin y)\overset{令}{=\!=}0, \\ f_y'=e^{y+x\sin y}x(1+x\cos y)\overset{令}{=\!=}0, \end{cases}$ 解得

$x_n=(-1)^{n+1}\sqrt{2}$，　$y_n=n\pi+\pi/4$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

在点 (x_n,y_n)，有

$$A_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{2}}e^{y_n+x_n\sin y_n},$$

$$B_n=-e^{y_n+x_n\sin y_n},\quad C_n=(-1)^{n+1}\sqrt{2}e^{y_n+x_n\sin y_n}.$$

而
$$A_nC_n-B_n^2=-2e^{2(y_n+x_n\sin y_n)}<0.$$

故 $f(x,y)$ 无极值.

(3) $\begin{cases} f_x'=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)\overset{令}{=\!=}0, \\ f_y'=e^{2x}(2y+2)\overset{令}{=\!=}0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=1/2, \\ y_0=-1. \end{cases}$

在点 $(1/2,-1)$，有

$$A=4e^{2x}(x+y^2+2y+1)|_{(1/2,-1)}=2e>0,$$

$$B=4e^{2x}(y+1)|_{(1/2,-1)}=0,\quad C=2e^{2x}|_{(1/2,-1)}=2e,$$

而
$$AC-B^2=4e^2>0.$$

故 $f(x,y)$ 在 $(1/2,-1)$ 取得极小值，$f(1/2,-1)=-e/2$.

例 15　求多项式 $P(x)=x^2+ax+b$，使得积分 $\int_{-1}^{1}P^2(x)dx$ 取得最小值.

解　记 $f(a,b)=\int_{-1}^{1}P^2(x)dx=\int_{-1}^{1}(x^2+ax^2+b)^2dx$，则

$$\frac{\partial f}{\partial a}=2\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)xdx=4\int_0^1 ax^2dx=\frac{4}{3}a,$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}=2\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)dx=4\int_0^1(x^2+b)dx=\frac{4}{3}a+4b.$$

令$\dfrac{\partial f}{\partial a}=0,\dfrac{\partial f}{\partial b}=0$,解得 $a=0,b=-\dfrac{1}{3}$.

又 $A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial a^2}=\dfrac{4}{3}$, $B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial a\partial b}=0$, $C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial b^2}=4$,而 $AC-B^2=16/3>0$,$A=4/3>0$,故 $f(0,-1/3)$是最小值,$P(x)=x^2-1/3$.

例 16 证明:当任一锐角三角形内一点到三顶点连线成等角时,该点到三顶点距离之和为最小.

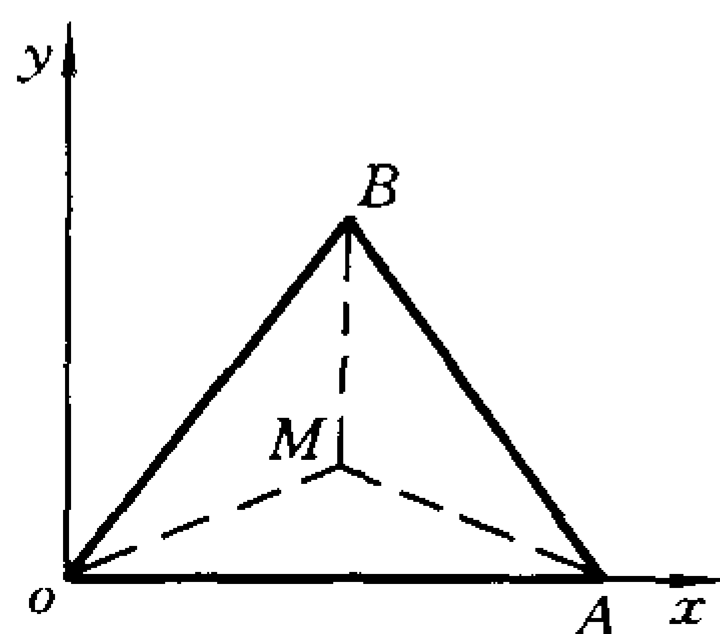


图 10.17

证 如图 10.17 所示,设三角形三顶点为 $o(0,0)$,$A(a,0)$,$B(b,c)$. $M(x,y)$为三角形内任意点,则距离之和可表示为

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{(x-b)^2+(y-c)^2}.$$

设$\overrightarrow{oM},\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}$与 x 轴正向夹角分别为 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$,则

$$\begin{aligned}f_x'&=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}+\frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2+(y-c)^2}}\\&=\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_y'&=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}+\frac{y-c}{\sqrt{(x-b)^2+(y-c)^2}}\\&=\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3=0,\end{aligned}$$

故
$$\begin{cases}\cos\theta_1+\cos\theta_2=-\cos\theta_3,\\ \sin\theta_1+\sin\theta_2=\sin\theta_3.\end{cases}$$

将两式平方后相加,得 $\cos(\theta_2-\theta_1)=-1/2$,于是

$$\theta_2-\theta_1=\frac{2\pi}{3}\text{ 或 }\frac{4\pi}{3},\quad \theta_3-\theta_2=\frac{2\pi}{3}\text{ 或}\frac{4\pi}{3}.$$

所以 $\theta_2-\theta_1=\theta_3-\theta_2=\dfrac{2\pi}{3}$时，函数 $f(x,y)$取得最小值.

例 17 求函数 $f(x,y)=x^2+2x^2y+y^2$ 在圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$上的最大值与最小值.

解 $\begin{cases} f_x'=2x(1+2y)=0, \\ f_y'=2(x^2+y)=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, & 1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}, \\ y=0, & -1/2,-1/2. \end{cases}$

函数在 D 内有三个驻点 $P_1(0,0)$，$P_2\left(1/\sqrt{2},-1/2\right)$，$P_3\left(-1/\sqrt{2},-1/2\right)$，且 $f(P_1)=0,f(P_2)=1/4,f(P_3)=1/4$.

在边界 $x^2+y^2=1$ 上，f 变为一元函数

$$f_1=1+2(1-y^2)y=1+2y-2y^3,\ -1\leqslant y\leqslant 1.$$

由 $f_{1y}'=2-6y^2 \overset{令}{=\!=} 0$ 解得 $y=\pm 1/\sqrt{3}$. 因此 $f_1(-1)=1,f_1(1)=1,f_1\left(1/\sqrt{3}\right)=1+4\sqrt{3}/9,f_1\left(-1/\sqrt{3}\right)=1-4\sqrt{3}/9$. 从而可知，在 D 的边界上，f 的最大值为 $f_1(1/\sqrt{3})=1+4\sqrt{3}/9$，$f$ 的最小值为 $f_1\left(-1/\sqrt{3}\right)=1-4\sqrt{3}/9$.

再与 D 内的极值比较可知，f 的最小值与最大值分别为

$$\min_{(x,y)\in D} f(x,y)=f(0,0)=0,$$

$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y)=f\left(1/\sqrt{3}\right)=1+4\sqrt{3}/9.$$

例 18 设渠道的横截面为等腰梯形，截面积为 A，等腰梯形的底与高各为多少时，渠道的湿周(两腰与底之和)为最小?

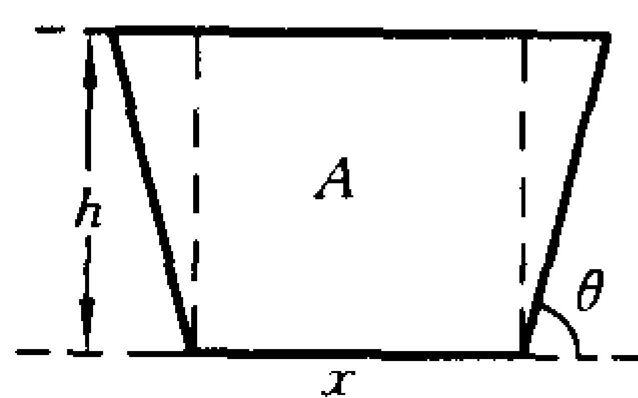


图 10.18

解 如图 10.18 所示，设等腰梯形下底长为 x，高为 h，湿周为 L，腰与底边延长线夹角为 θ $(0<\theta<\pi/2)$，则

$$L=x+2h/\sin\theta,\quad A=(2x+2h\cot\theta)h/2\Rightarrow x=A/h-h\cot\theta,$$

则
$$L(h,\theta)=\frac{A}{h}+\frac{h(2-\cos\theta)}{\sin\theta}.$$

于是
$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial h}=-\dfrac{A}{h^2}+\dfrac{2-\cos\theta}{\sin\theta}\xlongequal{\text{令}}0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial\theta}=\dfrac{h\sin^2\theta-h(2-\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta}\xlongequal{\text{令}}0,\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}h=\sqrt{A/\sqrt{3}},\\ \theta=\pi/3.\end{cases}$$
由此得惟一稳定点$(\sqrt{A/\sqrt{3}},\pi/3)$. 而问题必有最小值，所以$L(h,\theta)$在点$(\sqrt{A/\sqrt{3}},\pi/3)$取得最小值. 从而可知，等腰梯形当底$x=A/h-h\cot\theta=2\sqrt{A}/\sqrt[4]{27}$，高$h=\sqrt{A}/\sqrt[4]{27}$时，渠道的湿周为最小.

例 19 某厂的一种产品同时在两个城市销售，售价分别为q_1和q_2，需求函数分别为
$$q_1=24-0.2p_1,\quad q_2=10-0.05p_2,$$
总成本函数为$C=35+40(q_1+q_2)$. 问：厂方如何确定两个市场的售价，才能使其获得的总利润最大？最大总利润为多少？

解 先建立总收入函数R和总利润函数L.
$$R=p_1q_2+p_2q_2=24p_1-0.2p_1^2+10p_2-0.05p_2^2,$$
$$L=R-C=32p_1-0.2p_1^2+12p_2-0.05p_2^2-1395,$$
求得
$$\begin{cases}L_{p_1}{}'=32-0.4p_1\xlongequal{\text{令}}0,\\ L_{p_2}{}'=12-0.1p_2\xlongequal{\text{令}}0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p_1=80,\\ p_2=120,\end{cases}$$
由此得惟一稳定点(80,120). 而问题必有最大值，所以确定售价分别为$p_1=80,p_2=120$时，获得的总利润最大，最大总利润为$R=605$.

例 20 证明：若x,y,z为实数，且$e^x+y^2+|z|=3$，则$e^xy^2|z|\leqslant 1$.

证 设$f(x,y)=e^xy^2|z|=e^xy^2(3-e^x-y^2)$，$f(x,y)$的定义域以$e^x+y^2=3$为边界. 所以

$$\begin{cases} f_x' = e^x y^2(3-2e^x-y^2) \xlongequal{令} 0, \\ f_y' = 2e^x y^2(3-e^x-2y^2) \xlongequal{令} 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=\pm 1, \end{cases}$$

故 $f(x,y)$ 有两个稳定点 $(0,1)$ 与 $(0,-1)$.

又由 $f_{xx}''=e^x y^2(3-4e^x-y^2)$，$f_{xy}''=2e^x y(3-2e^x-2y^2)$，$f_{yy}''=2e^x(3-e^x-6y^2)$，得

$$f_{xx}''(0,\pm 1)=-2, \quad f_{xy}''(0,\pm 1)=\mp 2, \quad f_{yy}''(0,\pm 1)=-8,$$

故 $AC-B^2>0$，而 $A<0$，知 $(0,1)$ 与 $(0,-1)$ 均为极大值点，极大值 $f(0,\pm 1)=1$. 而在边界 $e^x+y^2=3$ 上 $f(0,y)=0$. 从而可知，$f(0,\pm 1)=1$ 为最大值，即 $e^x y^2|z|\leqslant 1$.

例 21 证明：当 $0<x<1$，$0<y<+\infty$ 时，有

$$f(x,y)=yx^y(1-x)<e^{-1}.$$

证 求 $f(x,y)$ 在 $0<x<1$，$0<y<+\infty$ 上的最大值.

在区域边界上，$f(x,y)$ 显然恒等于零，而在区域内，$f(x,y)>0$，故 $f(x,y)$ 的最大值在区域内，最大值即极值.

$$由\begin{cases} f_x' = yx^{y-1}(y-xy-x) \xlongequal{令} 0, \\ f_y' = x^y(1-x)(1+y\ln x) \xlongequal{令} 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(1-x)=x, \\ x^y=e^{-1}, \end{cases}$$

满足上述条件的点为极值点，即最大值点，有

$$f(x,y)=yx^y(1-x)=xe^{-1}<e^{-1}.$$

从而知 $f(x,y)$ 在域 $0<x<1$，$0<y<+\infty$ 上的最大值小于 e^{-1}.

例 22 设函数 $z=f(x,y)$ 在 $U((x_0,y_0),\delta)$ 内二阶偏导数连续，且 $f_x'(x_0,y_0)=0$，$f_{xx}''(x_0,y_9)>0$. 证明：$\exists\ U(y_0;\delta)$，使得 $\forall\ y\in U(y_0;\delta)$，$\exists\ f(x,y)$ 关于 x 有一个极小值 $g(y)$，且 $g'(y)=f_y'(x_0,y_0)$.

证 由题设条件知，$\exists\ \delta_1>0$，使得在 (x_0,y_0) 的方形 δ_1 邻域内，有 $f_{xx}''(x,y)>0$. 又由题设条件知，$f(x,y_0)$ 在 (x_0,y_0) 取得极小值 $f(x_0,y_0)$，故 $\exists\ \delta_2(\delta_1>\delta_2>0)$，使得在 (x_0,y_0) 的方形 δ_2 邻域内，当 $x<x_0$ 时，$f_x'(x,y_0)<0$；当 $x>x_0$ 时，$f_x'(x,y_0)>0$. 所以 $\exists\ \delta>0$，$\delta_2>\delta>0$，使得当 $y\in U(y_0,\delta)$ 时，

$$f_x'(x_0+\delta_2,y)>0,\quad f_x'(x_0-\delta_2,y)<0.$$

因为$\forall\ y\in U(y_0,\delta)$，$f(x,y)$关于$x$在$[x_0-\delta_2,x_0+\delta_2]$上连续，且上述不等式成立，从而由连续函数的介值定理知，$\exists\ \xi\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$，使得$f_x'(\xi,y)=0$.

因为$(\xi,y)\in U((x_0,y_0);\delta_2)$，所以$f_{xx}''(\xi,y)>0$. 故$f(x,y)$关于$x$有极小值$f(\xi,y)=g(y)$.

而$f(x,y_0)$关于x的极小值是$f(x_0,y_0)=g(y_0)$.

设$g(y_0+\Delta x)=f(x'',y_0+\Delta y)$ $(|\Delta y|<\delta)$，由题设条件知，$f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微，故

$$\begin{aligned}&f(x'',y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=f_x'(x_0,y_0)(x''-x_0)+f_y'(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho)\\&=f_y'(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho)\ (\rho=\sqrt{(x''-x)^2+\Delta y^2}\longrightarrow 0).\end{aligned}$$

从而
$$\begin{aligned}g'(y_0)&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{g(y_0+\Delta y)-g(y_0)}{\Delta y}\\&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x'',y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}\\&=f_y'(x_0,y_0)+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta y}=f_y'(x_0,y_0).\end{aligned}$$

例 23 设$z=f(x,y)$在有界闭域D上有二阶连续偏导数，且$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\neq 0$，证明：$z$的最值只能在$D$的边界上取得.

证 由题设知，$f(x,y)$在D上连续，故$z=f(x,y)$在D上必取得最值.

用反证法. 设$z=f(x,y)$在D内点(x_0,y_0)取得最值，由题设条件知，$f(x,y)$在D内可微，故(x_0,y_0)必为极值点. 由$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\neq 0\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\leqslant 0$，于是$AC-B^2=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}<0$. 此式在点$(x_0,y_0)$也应成立，从而在点$(x_0,y_0)$无极值，引出矛盾. 这样，$z=f(x,y)$在$D$内无极值点，所以最值只能在$D$的边界取得.

第十一章　隐函数定理及其应用

第一节　隐函数与隐函数组

主要内容

1. 设 $X\subset\mathbf{R}$，$Y\subset\mathbf{R}$，函数 $F:X\times Y\to\mathbf{R}$ 对于方程 $F(x,y)=0$，若 $\exists\ I\subset X$ 与 $J\subset Y$，使得 $\forall\ x\in I$，恒有惟一确定的 $y\in J$，满足 $F(x,y)=0$，则称方程确定了一个定义在 I 上、值域含于 J 的隐函数 $y=f(x)$. 恒等式 $F(x,f(x))\equiv 0$，$x\in I$ 成立.

2. 惟一性定理　若函数 F 满足下列三个条件：

- 在以 $P_0(x_0,y_0)$ 为内点的某一区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上连续，
- $F(x_0,y_0)=0$（通常称为初始条件），
- 在 D 内存在连续偏导数 $F_y(x,y)$，且 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$，

则在 $U(P_0)\subset D$ 内，方程 $F(x,y)=0$ 惟一地确定一个定义在某区域 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 内的函数 $y=f(x)$，使得

- $f(x_0)=y_0$，$x\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 时，$(x,f(x))\in U(P_0)$ 且 $F(x,f(x))\equiv 0$，
- $f(x)$ 在 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 内连续.

3. 可微性定理　设 $F(x,y)$ 满足惟一性定理中的三个条件，且 $F_x(x,y)$ 在 D 内连续，则由 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$ 在其定义域 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 内有连续导函数 $f'(x)=-\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$.

4. 若函数 F 满足以下三个条件：

• $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)$在以点 $P_0(x_1^0,x_0^2,\cdots,x_n^0,y^0)$为内点的区域 $D\subset\mathbf{R}^{n+1}$上连续，

• $F(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0,y^0)=0$,

• 偏导数 $F_{x_1},F_{x_2},\cdots F_{x_m},F_y$ 在 D 内存在并连续，且

$$F_y(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y^0)\neq 0,$$

则在$U(P_0)\subset$内，方程 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$ 惟一确定一个定义在 $Q_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$的某邻域$U(Q_0)\subset\mathbf{R}^n$ 内的 n 元连续函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，使得

• 当$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in U(Q_0)$时，

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n,f(x_1,x_2,\cdots,x_n))\in U(P_0),$$

且
$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,f(x_1,x_2,\cdots,x_n))=0,$$
$$y^0=f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0);$$

• $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在$U(Q_0)$内有连续偏导数 $f_{x_1},f_{x_2},\cdots,f_{x_m}$，且

$$f_{x_1}=-\frac{F_{x_1}}{F_y},\quad f_{x_2}=-\frac{F_{x_2}}{F_y},\quad \cdots\quad ,f_{x_n}=-\frac{F_{x_n}}{F_y}.$$

5. 设 $F(x,y,u,v)$与 $G(x,y,u,v)$为定义在区域 $V\subset\mathbf{R}^4$ 上的两个四元函数，若$\exists$ 平面区域 D,$\forall$ $(x,y)\in D$，有区间 J 和 K 上惟一一对值 $u\in J,v\in K$，与 x,y 一起满足方程组

$$F(x,y,u,v)=0,\quad G(x,y,u,v)=0,$$

则称方程组确定了两个定义在 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上. 值域分别含于 J 和 K 的隐函数组 $u=f(x,y),v=g(x,y)$，恒等式

$$F(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0,\quad G(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0$$

成立. 行列式$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$称为函数 F,G 关于变量 u,v 的雅可比(Jacobi)行列式.

6. 若函数 F,G 满足以下三个条件：

• $F(x,y,u,v)$与 $G(x,y,u,v)$在以点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$为内

点的区域 $V\subset\mathbf{R}^4$ 内连续，

- $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0, G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，
- 在 V 内，F,G 有一阶连续偏导数，且 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$ 在点 P_0 不等于零，

则在 $U(P_0)\subset V$ 内，方程组惟一确定定义在 $Q_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(Q_0)$ 内的二元隐函数 $u=f(x,y), v=g(x,y)$，使得

- $u_0=f(x_0,y_0), v_0=g(x_0,y_0)$，且当 $(x,y)\in U(Q_0)$ 时，

$$(x,y,f(x,y),g(x,y))\in U(P_0),$$
$$F(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0,$$
$$G(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0,$$

- $f(x,y), g(x,y)$ 在 $U(Q_0)$ 内连续，
- $f(x,y), g(x,y)$ 在 $U(Q_0)$ 内有一阶连续偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}.$$

7. 函数组 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 及其一阶偏导数在某区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上连续，点 $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点，且 $u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v(x_0,y_0)$，$\left.\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}\neq 0$，则在点 $P_0'(u_0,v_0)$ 的某邻域 $U(P_0')$ 内存在惟一一组反函数 $x=x(u,v), y=y(u,v)$，使得 $x_0=x(u_0,v_0)$，$y_0=y(u_0,v_0)$，且当 $(u,v)\in U(P_0')$ 时，有 $(x(u,v),y(u,v))\in U(P_0)$ 及恒等式

$$u\equiv u(x(u,v),y(u,v)),\quad v\equiv v(x(u,v),y(u,v)).$$

反函数组在 $U(P_0')$ 内存在一阶连续偏导数

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial v}{\partial y}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial u}{\partial y}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)},$$
$$\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial u}{\partial y}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}.$$

互为反函数组的函数组 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 与 $x=x(u,v),y=y(u,v)$ 的雅可比行列式互为倒数，即

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1.$$

疑难解析

1. 怎样理解惟一性定理的条件？

答 (1) 条件是充分的但不是必要的. 例如 $y^3-x^3=0$ 在点 $(0,0)$ 不满足 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$（事实上，$F_y(0,0)=0$），但它惟一确定连续函数 $y=x$.

而 $F(x,y)=(x^2+y^2)^2-x^2+y^2=0$，满足其它条件，仅因 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ $(F_y(0,0)=0)$，而在 $P((0,0);\delta)$ 内不存在惟一的隐函数.

(2) 第三个条件是为了保证在 $U(P_0)$ 内 F 关于 y 严格单调而设立的，可减弱为“F 在 $U(P_0)$ 关于 y 严格单调”.

(3) 若将第三个条件改为 $F_x(x,y)$ 连续，且 $F_x(x_0,y_0)\neq 0$，则结论为：存在惟一的连续函数 $x=g(y)$.

惟一性定理是一个局部性定理，只在点 $P(x_0,y_0)$ 的某邻域内，$F(x,y)=0$ 惟一确定函数 $y=f(x)$. 而在大范围内不一定惟一. 例如，$F(x,y)=x^2-y^2=0$. 在 $-\infty<x<+\infty$ 内，若只要求 $y=f(x)$ 连续，有四个解：$y=x,y=-x,y=|x|,y=-|x|$. 若要求 $y=f(x)$ 可微，则有两个解：$y=x,y=-x$. 若要求满足 $f(1)=1$ 且连续，有两个解：$y=x,y=|x|$. 若要求满足 $f(0)=0$，则仍有四个解.

方法、技巧与典型例题分析

一、隐函数及其偏导数

讨论隐函数的存在主要是验证隐函数存在的条件是否满足，

对于有些问题,则可如疑难解析 1 所述去考虑. 隐函数的导数,可在确定存在连续可微隐函数的前提下,应用复合函数求导法求出;隐函数的高阶导数可用同样方法求得.

例 1 设 $x=x(y,z)$, $y=y(z,x)$, $z=z(x,y)$ 为由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数,证明:$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=-1$.

证 依可微性定理,$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_x}$, $\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_z}{F_y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$,所以

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{F_y}{F_x}\right)\left(-\frac{F_z}{F_y}\right)\left(-\frac{F_x}{F_z}\right)=-1.$$

例 2 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $y=z+x^2z^3$ 所确定,求 $u=\sin z$ 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 令 $F(x,y,z)=z+x^2z^3-1$,则 $\frac{\partial F}{\partial z}=1+3x^2z^2\neq 0$,故依惟一性定理,对 $y=z+x^2z^3$ 两边微分,有

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}z+2xz^3\mathrm{d}x+3x^2z^2\mathrm{d}z,$$

故

$$\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}y-2xz^3\mathrm{d}x}{1+3x^2z^2}.$$

又

$$\mathrm{d}u=\cos z\mathrm{d}z=\frac{\cos z\mathrm{d}y-2xz^3\cos z\mathrm{d}x}{1+3x^2z^2},$$

于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2xz^3\cos z}{1+3x^2z^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\cos z}{1+3x^2z^2}.$$

例 3 证明:设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x+z/y,y+z/x)=0$ 所确定,且 $F(u,v)$ 具有连续偏导数,则 $z=xy+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$.

证 依隐函数求导公式,设 $u=x+z/y$, $v=y+z/x$,则 $F_x=F_u-\frac{z}{x^2}F_v$, $F_y=-\frac{z}{y^2}F_u+F_v$, $F_z=\frac{1}{y}F_u+\frac{1}{x}F_v$,故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_u-(z/x^2)F_v}{F_u/y+F_v/x}=\frac{zF_v-x^2F_u}{xF_u+yF_v}\cdot\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-(z/y^2)F_u+F_v}{F_u/y+F_v/x}=\frac{zF_u-y^2F_v}{xF_u+yF_v}\cdot\frac{x}{y},$$

于是

$$xy + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + \frac{yzF_v - x^2yF_u}{xF_u + yF_v} + \frac{xzF_u - xy^2F_v}{xF_u + yF_v}$$

$$= xy + \frac{z(xF_u + yF_v) - xy(xF_u + yF_v)}{xF_u + yF_v}$$

$$= xy + z - xy = z.$$

例 4 在上半椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (z>0)$上，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 设 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0, F_z=\frac{2z}{c^2}>0$，故隐函数存在. 方程两边分别对 x,y 求导，得

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{2y}{b^2}+\frac{2z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}.$$

例 5 设 $u=f(x,z)$，而 $z(x,y)$是由方程 $z=x+y\varphi(z)$所确定的函数，求 $\mathrm{d}u$.

解 先对 $u=f(x,z)$求偏导数$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1+f_2\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=f_2\frac{\partial z}{\partial y}.$$

再令 $F(x,y,z)=x+y\varphi(z)-z$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$，得

$$F_x=1,\quad F_y=\varphi(z),\quad F_z=y\varphi'(z)-1,$$

故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{y\varphi'(z)-1},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\varphi(z)}{y\varphi'(z)-1},$$

从而

$$\mathrm{d}u=\left(f_1+f_2\frac{\partial z}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+f_2\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$=\left(f_1-\frac{f_2}{y\varphi'(z)-1}\right)\mathrm{d}x-\frac{f_2\varphi(z)}{y\varphi'(z)-1}\mathrm{d}y.$$

例 6 证明：由方程 $y=x\varphi(z)+\psi(z)$所确定函数 $z=z(x,y)$ 满足方程$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

证 先对方程求一阶偏导数，有

$$\begin{cases}\varphi(z)+x\varphi'(z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+\psi'(z)\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\ x\varphi'(z)\dfrac{\partial z}{\partial y}+\psi'(z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=1\ (x\varphi'+\psi'\neq 0).\end{cases}$$

再对上式求偏导，得

$$\begin{cases}2\varphi'\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x\varphi''+\psi'')\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+(x\varphi'+\psi')\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, & ①\\ \varphi'\dfrac{\partial z}{\partial y}+(x\varphi''+\psi'')\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}+(x\varphi'+\psi')\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0, & ②\\ (x\varphi''+\psi'')\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2+(x\varphi'+\psi')\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, & ③\end{cases}$$

①$\times\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2-$②$\times 2\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}+$③$\times\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2$，得

$$(x\varphi'+\psi')\left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]=0.$$

因为 $x\varphi'+\psi'\neq 0$，故

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

例 7 设方程 $x^2+y^2+z^2=4z$ 确定 z 为 x,y 的函数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 对方程两边关于 x 求偏导，得

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=4\frac{\partial z}{\partial x},\qquad ④$$

即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}.\qquad ⑤$$

对式④两边关于 x 求偏导，得

$$2+2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1+(\partial z/\partial x)^2}{2-z}.\qquad ⑥$$

将式⑤代入式⑥，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}.$$

又对题给方程关于 y 求偏导，得

$$2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=4\frac{\partial z}{\partial y}, \tag{7}$$

即

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{2-z}. \tag{8}$$

对式⑦两边关于 y 求偏导，得

$$2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z/\partial x\cdot\partial z/\partial y}{2-z}. \tag{9}$$

将式⑤、式⑧代入式⑨，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x/(2-z)\cdot y(2-z)}{2-z}=\frac{xy}{(2-z)^3}.$$

例 8 设函数 $F(u,v)$ 有二阶连续偏导数，证明：方程 $F\left(\frac{x-x_0}{z-z_0},\frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足下列方程：

$$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}=z-z_0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2.$$

证

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(z-z_0)F_u}{(x-x_0)F_u+(y-y_0)F_v}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(z-z_0)F_v}{(x-x_0)F_u+(y-y_0)F_v}, \tag{11}$$

将 $(x-x_0)\times$⑩$+(y-y_0)\times$⑪，得

$$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}=z-z_0. \tag{12}$$

式⑫两边关于 x 或 y 求导，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y - y_0}{x - x_0}\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x - x_0}{y - y_0}\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial z}.$$

将上述两式相乘，即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

例 9 设函数 $\varphi(u,v)$ 具有一阶连续偏导数，证明：方程 $\varphi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 满足

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

证 设 $u=cx-az, v=cy-bz$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_z} = -\frac{\varphi_u \cdot c - \varphi_v \cdot 0}{\varphi_u(-a) + \varphi_v(-b)} = \frac{c\varphi_u}{a\varphi_u + b\varphi_v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\varphi_y}{\varphi_z} = -\frac{\varphi_u \cdot 0 + \varphi_v \cdot c}{\varphi_u(-a) + \varphi_v(-b)} = \frac{c\varphi_v}{a\varphi_u + b\varphi_v},$$

故

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c(a\varphi_u + b\varphi_v)}{a\varphi_u + b\varphi_v} = c.$$

二、隐函数组及其偏导数

例 10 讨论方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = u^2 + v^2 - x^2 - y = 0, \\ G(x,y,u,v) = u + v - x^2 + y = 0 \end{cases}$$

确定的隐函数组 $u=u(x,y)$ 与 $v=v(x,y)$ 及其在点 $P(2,1,1,2)$ 的偏导数.

解 因为 $F_u'(P)=2, F_v'(P)=4, G_u'(P)=1, G_v'=1$，所以

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

故方程组确定了一个隐函数组 $u=u(x,y), v=v(x,y)$.

对方程组两边分别关于 x,y 求导，得

$$\begin{cases} 2uu_x' + 2vv_x' - 2x \xlongequal{\text{令}} 0, \\ 2uu_y' + 2vv_y' - 1 \xlongequal{\text{令}} 0, \\ u_x' + v_x' - 2x \xlongequal{\text{令}} 0, \\ u_y' + v_y' + 1 \xlongequal{\text{令}} 0, \end{cases}$$

解得 $$u_x' = \frac{x(1-2v)}{u-v}, \quad u_y' = \frac{1+2v}{2(u-v)},$$

$$v_x' = \frac{x(2u-1)}{u-v}, \quad v_y' = \frac{-2u-1}{2(u-v)}.$$

例 11 设 $f(x,y,z)=xy^2z^3$，且 x,y,z 又满足

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0. \qquad ⑬$$

(1) 设 z 是由方程⑬确定的隐函数，求 $f_x(1,1,1)$；

(2) 设 y 是由方程⑬确定的隐函数，求 $f_x(1,1,1)$.

解 (1) 因为 $z=z(x,y)$，所以 $f(x,y,z)=f(x,y,z(x,y))$，依复合函数求导法则，有

$$f_x = y^2z^3 + xy^2 \cdot 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} = y^2z^2\left(z + 3x\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

又对方程⑬两边关于 x 求偏导，得

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} - 3yz - 3xz\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

从而知 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3yz-2x}{2z-3xy} \Rightarrow f_x = y^2z^2\left(z+3x\frac{3yz-2x}{2z-3xy}\right),$$

于是 $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,1)} = -1, \quad f_x(1,1,1) = -2.$$

(2) 此时，$f(x,y,z)=f(x,y(x,z),z)$，有

$$f_x = y^2z^3 + xz^3 \cdot 2y\frac{\partial y}{\partial x} = yz^3\left(y + 2x\frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

将方程⑬两边关于 x 求偏导，得

$$2x + 2y\frac{\partial y}{\partial x} - 3yz - 3xz\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

从而知 $\dfrac{\partial y}{\partial x}=\dfrac{3yz-2x}{2y-3xz}\Rightarrow f_x=yz^3\left(y+2x\dfrac{3yz-2x}{2y-3xz}\right).$

于是 $\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=-1,\quad f_x(1,1,1)=-1.$

注意 题(1),(2)条件不同,方程⑬关于 x 的偏导数也不同.

例 12 求下列方程组确定的隐函数组的导数:

(1) $\begin{cases}u=f(ux,v+y),\\ v=g(u-x,v^2y),\end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$;

(2) $\begin{cases}x=e^u+u\sin v,\\ y=e^u-u\cos v,\end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解 设 $u=u(x,y),v=v(x,y)$.

(1) 方程两边关于 x 求偏导,得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'\left(u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+f_2'\dfrac{\partial v}{\partial x},\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=g_1'\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-1\right)+2g_2'\dfrac{\partial v}{\partial x}yv.\end{cases}$$

解得
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-uf_1'(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'}{(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'},$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{g_1'(xf_1'+uf_1'-1)}{(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'}.$$

(2) 方程两边求微分,得

$$\begin{cases}e^u\mathrm{d}u+\sin v\mathrm{d}u+u\cos v\mathrm{d}v=\mathrm{d}x,\\ e^u\mathrm{d}u-\cos v\mathrm{d}u+u\sin v\mathrm{d}v=\mathrm{d}y,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}(e^u+\sin v)\mathrm{d}u+u\cos v\mathrm{d}v=\mathrm{d}x,\\ (e^u-\cos v)\mathrm{d}u+u\sin v\mathrm{d}v=\mathrm{d}y,\end{cases}$$

解得
$$\mathrm{d}u=\frac{\sin v\mathrm{d}x-\cos v\mathrm{d}y}{e^u(\sin v-\cos v)+1},$$
$$\mathrm{d}v=\frac{(\cos v-e^u)\mathrm{d}x+(\sin v+e^u)\mathrm{d}y}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}.$$

从而
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\cos v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\cos v - e^u}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sin v + e^u}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}.$$

注意 因为所求不同,所以题(1)只对 x 求偏导,题(2)是求微分.两者是有区别的.

例 13 设函数 $u=u(x,y)$ 由方程 $u=f(x,y,z,t)$, $g(y,z,t)=0$, $h(z,t)=0$ 定义,求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解法 1 先分析函数关系,分清哪个是因变量,哪个是中间变量,哪个是自变量.

由 $g(y,z,t)=0$, $h(z,t)=0$ 解得,t, z 为 y 的函数,代入 $u=f(x,y,z,t)$ 得 $u=u(x,y)$,再分别对 x 和 y 求导,得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dy} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dy}.$$

再由 $g(y,z,t)=0$, $h(z,t)=0$ 对 y 求导,得

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{dz}{dy} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{dt}{dy} = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial z}\frac{dz}{dy} + \frac{\partial h}{\partial t}\frac{dt}{dy} = 0, \end{cases}$$

解得 $$\frac{dz}{dy} = -\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t}\Big/\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t}\Big/\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}.$$

将 $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dt}{dy}$ 代入即得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dy} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dy} = \frac{\partial(f,g,h)}{\partial(y,z,t)}\Big/\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}.$$

解法 2 由方程组 $\begin{cases} f(x,y,z,t)-u=0, \\ g(y,z,t)=0, \\ h(z,t)=0 \end{cases}$ 解得 u, z, t 为 x, y 的函数,利用隐函数求导,得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\\ \dfrac{\partial g}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y}+0\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\\ \dfrac{\partial h}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{\partial h}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y}+0\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.\end{cases}$$

把$\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial t}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}$当做未知数，利用克拉默法则可解出$\frac{\partial u}{\partial y}$.

例 14 设 $y=f(x,t)$，t 是方程 $F(x,y,t)=0$ 确定的 x,y 的函数，f,F 都有一阶连续偏导数，证明：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial t}}.$$

证 方程组$\begin{cases}y=f(x,t),\\F(x,y,t)=0\end{cases}$确定隐函数组

$$\begin{cases}y=y(x),\\t=t(x).\end{cases}$$

方程两边关于 x 求导，得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x},\\ \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=0,\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial x},\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\partial F}{\partial x}.\end{cases}$$

解方程组，在条件

$$D=\begin{vmatrix}1 & -\dfrac{\partial f}{\partial t}\\ \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial t}\end{vmatrix}=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$$

下，得
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & -\dfrac{\partial f}{\partial t}\\ -\dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial t}\end{vmatrix}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

例 15 验证方程组

$$\begin{cases}x^2-y\cos(uv)+z^2=0,\\ x^2+y^2-\sin(uv)+2z^2=2,\\ xy-\sin u\cos v+z=0\end{cases}$$

在 $$P_0(x_0,y_0,z_0,u_0,v_0)=(1,1,0,\pi/2,0)$$

的邻域满足隐函数组惟一性定理条件，在点$(\pi/2,0)$的邻域存在惟一一组有连续偏导数的函数组

$$x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),$$

并求$\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial x}{\partial v}$在点 P 的值.

证 设$\begin{cases}F_1(x,y,z,u,v)=x^2-y\cos(uv)+z^2,\\ F_2(x,y,z,u,v)=x^2+y^2-\sin(uv)+2z^2-2,\\ F_3(x,y,z,u,v)=xy-\sin u\cos v+z,\end{cases}$可知：

(1) F_1,F_2,F_3 的所有偏导数在点 P_0 的邻域连续；

(2) $F_1(P_0)=F_2(P_0)=F_3(P_0)=0$；

(3) $J=\left.\frac{\partial(F_1,F_2,F_3)}{\partial(x,y,z)}\right|_{P_0}=\left.\begin{vmatrix}2x & -\cos(uv) & 2x\\ 2x & 2y & 4z\\ y & x & 1\end{vmatrix}\right|_{P_0}=6\neq0.$

故由定理知，方程组确定惟一的有连续偏导数的隐函数组

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v).$$

对原方程组中每个方程分别关于 u,v 求偏导数，则(对 u 的)

$$\begin{cases}2x\frac{\partial x}{\partial u}-\cos(uv)\frac{\partial y}{\partial u}+yv\sin(uv)+2z\frac{\partial z}{\partial u}=0,\\ 2x\frac{\partial x}{\partial u}+2y\frac{\partial y}{\partial u}-v\cos uv+4z\frac{\partial z}{\partial u}=0,\\ y\frac{\partial x}{\partial u}+x\frac{\partial y}{\partial u}-\cos u\cos v+\frac{\partial z}{\partial u}=0.\end{cases}$$

将$\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}$当未知数，用克拉默法则求得

$$\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{P_0}=\frac{\left|\begin{matrix}-yv\sin(uv) & -\cos(uv) & 2z\\ v\cos(uv) & 2y & 4z\\ \cos u\cos v & x & 1\end{matrix}\right|_{P_0}}{\left|\begin{matrix}2x & -\cos(uv) & 2z\\ 2x & 2y & 4z\\ y & x & 1\end{matrix}\right|_{P_0}}=0.$$

类似可求得 $$\left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{P_0}=\frac{\pi}{12}.$$

例 16 设 $x=e^v+u^3, y=e^u-v^3$，求反函数的偏导数$\frac{\partial v}{\partial x}$.

解 本题可看做对方程组

$$\begin{cases}F_1(x,y,u,v)=x-e^v-u^3=0,\\ F_2(x,y,u,v)=y-e^u-v^3=0\end{cases}$$

所确定的隐函数组 $u=u(x,y), v=v(x,y)$求偏导数. 由于 $J=\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}$处处不为零，故对方程组两边关于 x 求偏导数，有

$$\begin{cases}1=e^v v_x'+3u^2u_x',\\ 0=e^u u_x'-3v^2v_x',\end{cases}$$

解方程组，得

$$e^u=(e^{u+v}+9u^2v^2)v_x',$$

故 $$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{e^u}{e^{u+v}+9u^2v^2}.$$

例 17 设 $x=u\cos\frac{v}{u}, y=u\sin\frac{v}{u}$，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

解 方程组 $x=u\cos\frac{v}{u}, y=u\sin\frac{v}{u}$ 确定隐函数组 $u=u(x,y), v=v(x,y)$. 对方程两边关于 x 求导，得

$$\begin{cases}1=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\frac{v}{u}+u\left(-\sin\frac{v}{u}\right)\left[\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big/u^2\right],\\ 0=\frac{\partial u}{\partial x}\sin\frac{v}{u}+u\cos\frac{v}{u}\left[\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big/u^2\right],\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}\left(\cos\dfrac{v}{u}+\dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}-\sin\dfrac{v}{u}\dfrac{\partial v}{\partial x}=1,\\ \left(\sin\dfrac{v}{u}-\dfrac{v}{u}\cos\dfrac{v}{u}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}+\cos\dfrac{v}{u}\dfrac{\partial v}{\partial x}=0.\end{cases}$$

因为
$$D=\begin{vmatrix}\cos\dfrac{v}{u}+\dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u} & -\sin\dfrac{v}{u}\\ \sin\dfrac{v}{u}-\dfrac{v}{u}\cos\dfrac{v}{u} & \cos\dfrac{v}{u}\end{vmatrix}=1,$$

用克拉默法则解得
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}1 & -\sin\dfrac{v}{u}\\ 0 & \cos\dfrac{v}{u}\end{vmatrix}=\cos\frac{v}{u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}\cos\dfrac{v}{u}+\dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u} & 1\\ \sin\dfrac{v}{u}-\dfrac{v}{u}\cos\dfrac{v}{u} & 0\end{vmatrix}=\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}-\sin\frac{v}{u}.$$

类似地，方程两边关于 y 求导，得
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sin\frac{v}{u},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}+\cos\frac{v}{u}.$$

例 18 设 $z=f(x,y)$，作变量代换 $x=uv,y=(u^2-v^2)/2$，将方程 $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1$ 用 z 关于新变量的导数表示.

解 设变换公式的逆变换 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 存在，则
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$

对逆变换组分别关于 x 和 y 求导，得
$$\begin{cases}1=\dfrac{\partial u}{\partial x}v+\dfrac{\partial v}{\partial x}u,\\ 0=\dfrac{\partial u}{\partial x}u-\dfrac{\partial v}{\partial x}v,\end{cases}\quad \begin{cases}1=\dfrac{\partial u}{\partial y}u-\dfrac{\partial v}{\partial y}v,\\ 0=\dfrac{\partial u}{\partial y}v+\dfrac{\partial v}{\partial y}u,\end{cases}$$

由克拉默法则解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{v}{u^2+v^2},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{u}{u^2+v^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{u^2+v^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-v}{u^2+v^2},$$

代入得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{u^2+v^2}\left(v\frac{\partial z}{\partial u}+u\frac{\partial z}{\partial v}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{u^2+v^2}\left(u\frac{\partial z}{\partial u}-v\frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

从而原方程变换为

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=u^2+v^2.$$

第二节　几何应用与条件极值

主要内容

一、几何应用

1. 平面曲线方程 $F(x,y)=0$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域内满足隐函数定理条件，在 P_0 附近确定隐函数 $y=f(x)$，则曲线在点 P_0 有

切线方程：　$F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$,

法线方程：　$F_x(x_0,y_0)(x-x_0)-F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$.

2. 空间曲线方程 $L:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的邻域满足隐函数组定理的条件，则在点 P_0 附近确定隐函数组 $x=\varphi(z),y=\psi(z)$，于是曲线在点 P_0 有

切线方程：
$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{P_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}},$$

法平面方程：$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{P_0}(y-y_0)$

$$+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}(z-z_0)=0.$$

3. 曲面方程 $F(x,y,z)=0$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的邻域满足隐函数定理条件，在 P_0 附近确定隐函数 $z=f(x,y)$，使得当 $z_0=f(x_0,y_0)$ 时，曲面在点 P_0 有

切平面方程：$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$

$$+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0,$$

法线方程：$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$

二、条件极值

1. 附有约束条件的极值问题称为条件极值问题，其一般形式是：在条件组

$$\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\ k=1,2,\cdots,m\ (m<n)$$

的限制下，求目标函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的极值.

2. 一般条件的拉格朗日函数是

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_m;\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)$$

$$=f(x_1,x_2,\cdots,x_m)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_m),$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 称为拉格朗日乘数.

3. 求以上第 1 点所述的条件极值问题.

若 f 和 $\varphi_k(k=1,2,\cdots,m)$ 在域 D 内有一阶连续偏导数，$P_0(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ 是上述问题的极值点，雅可比矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

的秩为 m，则存在 m 个常数 $\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\cdots,\lambda_m^{(0)}$，使得$(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)};\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\cdots,\lambda_m^{(0)})$为拉格朗日函数的稳定点，即$(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)};\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\cdots,\lambda_m^{(0)})$为下面 $n+m$ 个方程的解：

$$\begin{cases} L_{x_1}=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}=0, \\ \cdots\cdots \\ L_{x_n}=\dfrac{\partial f}{\partial x_n}+\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}=0, \\ L_{\lambda_1}=\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0, \\ \cdots\cdots \\ L_{\lambda_m}=\varphi_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0. \end{cases}$$

疑难解析

1. 拉格朗日乘数法在求条件极值时有什么意义？

答 过去，我们都是用消元(减元)的方式来求解问题的，即把约束条件中的变量解出代入目标函数，减少目标函数中变量的个数，然后用求偏导数的办法来确定函数的稳定点. 但是，从条件组中解出 n 个变量非常麻烦，而且不总能实现. 所以，用消元法解条件极值问题不一定能成功.

拉格朗日乘数法是一种升元法. 在拉格朗日函数中变量增加了 m 个(即 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$). 这是一种求解条件极值的有效方法. 拉格朗日乘数法只给出了取条件极值的必要条件，因此，满足条件的点只是稳定点，不一定是条件极值点或最值点. 导数不存在的点也可能是极值点.

条件极值通常都用来解决最大值和最小值问题，所以在用拉格朗日乘数法求得稳定点后，一般只需通过比较函数值，即可确定是最大值还是最小值. 当稳定点惟一时，可以根据问题的实际意义

来确定它是最大值点还是最小值点.

方法、技巧与典型例题分析

一、隐函数的几何应用问题

当所给曲线和曲面的方程是以隐函数或隐函数组形式出现时,求它们的切线或切平面时就要用隐函数或隐函数组的微分法.因此,要求我们首先审视它是否满足惟一性定理条件,是否存在隐函数或隐函数组;再看是否满足可微分定理,并求出偏导数;最后依公式求出方程.

例 1 已知曲线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{2}=1,\\ x-2y+z=0,\end{cases}$ 求其在点 $P(1,1,1)$ 的切线方程与法平面方程.

解 设 $\begin{cases}F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{2}-1,\\ G(x,y,z)=x-2y+z,\end{cases}$ 求偏导数,得

$$F_x=2x,\quad F_y=2y,\quad F_z=z;$$

$$G_x=1,\quad G_y=-2,\quad G_z=1.$$

则曲线在点 P 的切线的方向向量

$$s=\left(\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}\right)\Bigg|_P$$

$$=\left(\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2} & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & \dfrac{1}{2}\\ 1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\\ 1 & -2\end{vmatrix}\right)=\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right),$$

故 切线方程: $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-3}$,

法平面方程: $5(x-1)+(y-1)-3(z-1)=0$,

即 $$5x+y-3z-3=0.$$

例 2 求笛卡儿叶形线 $2(x^3+y^3)-9xy=0$ 在点(2,1)的切线

方程与法线方程.

解 设 $F(x,y)=2(x^3+y^3)-9xy$，则 $F_x=6x^2-9y$，$F_y=6y^2-9x$ 在全平面连续，且 $F_x(2,1)=15$，$F_y(x,1)=-12\neq 0$. 故依公式知

切线方程：$15(x-2)-12(y-1)=0$，即 $5x-4y-6=0$，

法线方程：$-12(x-2)-15(y-1)=0$，即 $4x+5y-13=0$.

例 3 求曲线 Γ：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2y=4,\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,1,-2)$ 的切线方程与法平面方程.

解 用推导公式的方法求解. 方程两边对 x 求导，得

$$\begin{cases}2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,\\ 1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0.\end{cases}$$

解方程组，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{z-x}{y-z-1},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1-y+x}{y-z-1},$$

于是 $$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,1,-2)}=-\frac{3}{2},\quad \left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,1,-2)}=\frac{1}{2}.$$

即切线在点 $(1,1,-2)$ 的切向量 $\boldsymbol{s}=(1,-3/2,1/2)$. 故

切线方程：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+2}{1}$，

法平面方程：$2x-3y+z+3=0$.

例 4 求球面 $x^2+y^2+z^2=6$ 与抛物面 $z=x^2+y^2$ 的交线在点 $(1,1,2)$ 的切线方程.

解 设 $\begin{cases}F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=6,\\ G(x,y,z)=x^2+y^2-z,\end{cases}$ 求偏导数，得

$$F_x=2x,\quad F_y=2y,\quad F_z=2z;$$
$$G_x=2x,\quad G_y=2y,\quad G_z=-1.$$

则求得切线在点 $(1,1,2)$ 的方向向量

$$s=\left(\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}\right)=(-10,10,0).$$

故切线在点(1,1,2)的切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{0}.$$

例 5 已知曲面 $F(x,y,z)=0,G(x,y,z)=0$,求:

(1)此两方程能确定一条过点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的曲线的条件;

(2)上述曲线在点 P 有切线的条件;

(3)上述切线平行于 z 轴的条件.

解 (1) 当函数 F 和 G 在点 P 邻域内有连续偏导数,且 $(F_x,F_y,F_z)\cdot(G_x,G_y,G_z)\neq 0$ 时,两方程能确定一条过点 P 的曲线.因此,此时

$$\left(\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}\right)$$

的三个分量中至少有一个不为零,隐函数存在.

(2) 在题(1)的条件下,切向量 s 存在,故曲线在点 P 有切线.

(3) 当 $\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}\neq 0$ 时,切线向量为$(0,0,a)$,切线平行于 z 轴.

例 6 求曲面 $x^2+y^2+z^2=4$ 过直线 l 的切平面方程.

$$l:\begin{cases}4x+2y+3z=6,\\ 2x+y=0.\end{cases}$$

解 设切点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,曲面在点 P_0 的法向量

$$\boldsymbol{n}=(2x_0,2y_0,2z_0),$$

而过直线 l 的平面束方程为

$$4x+2y+3z-6+\lambda(2x+y)=0,$$

即

$$(4+2\lambda)x+(2+\lambda)y+3z-6=0,$$

依题意,得联立方程组

$$\begin{cases}\dfrac{4+2\lambda}{2x_0}=\dfrac{2+\lambda}{2y_0}=\dfrac{3}{2z_0}=t,\\(4+2\lambda)x_0+(2+\lambda)y_0+3z_0-6=0,\\x_0^2+y_0^2+z_0^2=4.\end{cases}$$

解得 $\quad 2t(x_0^2+y_0^2+z_0^2)=6,\quad t=3/4,\quad \lambda=-2.$

于是，切点为 $P_0(0,0,2)$，切平面方程为 $z=2$.

例 7 在椭球面 $x^2+2y^2+z^2-1$ 上求一点，使得过该点的切平面与平面 $x-y+2z=0$ 平行.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2=1$，则 $F_x=2x, F_y=4y, F_z=2z$，则在点 (x_0,y_0,z_0) 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x_0,2y_0,z_0)$.

又已知平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,2)$，由平行关系，得

$$\frac{x_0}{1}=\frac{2y_0}{-1}=\frac{z_0}{2}=\lambda\Rightarrow x_0=\lambda,\ y_0=-\frac{\lambda}{2},\ z_0=2\lambda.$$

于是，由 $\lambda^2+2(-\lambda/2)^2+(2\lambda)^2=1$ 得 $\lambda^2=2/11$，即 $\lambda=\pm\sqrt{2/11}$.
故所求点为 $\left(\pm\sqrt{2/11},\quad \mp\sqrt{2/11}/2,\quad \pm2\sqrt{2/11}\right)$.

例 8 证明：所有与曲面 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 相切的平面都相交于一点.

证 设 $F(x,y,z)=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)-z$，则 $F_x=f\left(\dfrac{y}{x}\right)-\dfrac{y}{x}f'\left(\dfrac{y}{x}\right)$，$F_y=f'\left(\dfrac{y}{x}\right)$，$F_z=-1$. 所以，在曲面上任一点 (x_0,y_0,z_0) 的切平面方程为

$$\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right](x-x_0)+f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(y-y_0)$$
$$-(z-z_0)=0.$$

即
$$\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right]x+f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)y-z$$
$$=-x_0f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)+y_0f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-y_0f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)+z_0$$
$$=-z_0+z_0=0.$$

显然，点(0,0,0)满足上述平面. 所以曲面在任一点的切平面都相交于一点(例如原点).

例 9 证明：曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$上任一点的切平面在各坐标轴上的截距之和等于常数 a.

证 设 $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$，则

$$F_x=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad F_y=\frac{1}{2\sqrt{y}},\quad F_z=\frac{1}{2\sqrt{z}},$$

故在曲面上任一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(1/\sqrt{x_0},1/\sqrt{y_0},1/\sqrt{z_0}).$$

从而过点 P_0 的切平面方程为

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0,$$

即 $$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a},$$

化简，得 $$\frac{x}{\sqrt{ax_0}}+\frac{y}{\sqrt{ay_0}}+\frac{z}{\sqrt{az_0}}=1.$$

所以，截距之和为

$$d=\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a.$$

例 10 设 $F(u,v)$具有一阶连续偏导数，a,b,c 为非零常数. 证明：曲面 $F(ax+bz,by+cz)=0$ 的任一切平面都平行于某定直线 l.

证 只需证切平面的法向量与一常向量正交. 令 $u=ax+bz$，$v=by+cz$，则曲面 F 在任一点 $P(x,y)$的切平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(aF_u,bF_y,bF_u+cF_v)|_P,$$

显然 $$\boldsymbol{n}\cdot(b/a,c/b,-1)=0.$$

即 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{s}=(b/a,c/b,-1)$ 正交. 也就是过曲面 F 上任一点的切平面与方向向量为 $\boldsymbol{s}$ 的直线平行.

$$l: \frac{x}{b/a} = \frac{y}{c/b} = \frac{z}{-1}.$$

二、条件极值问题

条件极值的求解问题一般是求函数的最大值与最小值问题，所以，我们通常只需求出稳定点，然后由实际问题来确定它所对应的函数值是否最值，是最大值还是最小值. 为了易于求解，目标函数要取得尽量简单. 例如，目标函数 $f=xyz$ 可取作 $g=\ln x+\ln y+\ln z$，$f=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 可取作 $g=(x-a)^2+(y-b)^2$. 详见例题.

例 11 将正数 a 分解为三个正数，使其的倒数之和为最小.

解 设三个正数为 x,y,z，则问题即为求目标函数

$$f(x,y,z) = 1/x + 1/y + 1/z \ (x,y,z \in (0,a))$$

在约束条件 $x+y+z=a$ 下的最小值.

建立拉格朗日函数

$$L(x,y,z;\lambda) = 1/x + 1/y + 1/z + \lambda(x + y + z - a),$$

对各变量求偏导数，得

$$\begin{cases} L_x = -1/x^2 + \lambda = 0, \\ L_y = -1/y^2 + \lambda = 0, \\ L_z = -1/z^2 + \lambda = 0, \\ L_\lambda = xyz - a = 0. \end{cases}$$

显然 $x=y=z$，解方程组，得

$$x = y = z = \sqrt[3]{a}, \quad \lambda = a^{-2/3}.$$

因稳定点惟一，而实际问题必有最小值，故点$(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a})$为最小值点，最小值 $f(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a})=3/\sqrt[3]{a}$.

例 12 在过点(2,1,1/3)的所有平面中，求出与三坐标面围成立体体积最小的平面.

解 设所求平面方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，则必有$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{3c}=$

1 为约束条件. 故问题即为函数 $V=abc/6$ 在条件 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{3c}=1$ 下的条件极值. 因为 $V=abc/6$ 与 $f=\ln a+\ln b+\ln c$ 有相同的极值点, 故取拉格朗日函数为

$$L(a,b,c;\lambda)=\ln a+\ln b+\ln c+\lambda\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{3c}-1\right).$$

求偏导数, 得方程组

$$\begin{cases} L_a=\dfrac{1}{a}-\dfrac{2\lambda}{a^2}=0, \\ L_b=\dfrac{1}{b}-\dfrac{\lambda}{b^2}=0, \\ L_c=\dfrac{1}{c}-\dfrac{\lambda}{3c^2}=0, \\ L_\lambda=\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{3c}-1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2\lambda, \\ b=\lambda, \\ c=\lambda/3. \end{cases}$$

将 a,b,c 代入第四式, 得 $\lambda=3$, 故 $a=6,b=3,c=1$, 所求平面方程为 $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{1}=1$. 最小值 $V(6,3,1)=(6\times3\times1)/6=3$.

例 13 有一座小山, 设其底面为 xoy 平面, 底部所占区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$, 小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $P_0(x_0,y_0)$ 为 D 上一点, 问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大, 写出最大方向导数 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

(2) 在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy\leqslant 75$ 上找出使 $g(x,y)$ 达到最大值的点, 作为攀登该山的起点.

解 (1) 因为, 沿梯度

$$\mathbf{grad}\,h(x,y)\big|_{(x_0,y_0)}=(y_0-2x_0)\boldsymbol{i}+(x_0-2y_0)\boldsymbol{j}$$

方向的方向导数最大, 最大值为梯度的模, 故

$$g(x_0,y_0)=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}$$
$$=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}.$$

(2) 令 $f(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$，约束条件为 $x^2+y^2-xy=75$，建立拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(x^2+y^2-xy-75),$$

求偏导数，得

$$\begin{cases}L_x=10x-8y+\lambda(y-2x)=0,\\ L_y=10y-8x+\lambda(x-2y)=0,\\ L_\lambda=x^2+y^2-xy-75=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y=\pm\sqrt{75},\\ x=-y=\pm 5.\\ \lambda=2.\end{cases}$$

得到四个稳定点 $P_1(5,-5)$，$P_2(-5,5)$，$P_3(5\sqrt{3},5\sqrt{3})$，$P_4(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3})$. 求得

$$f(P_1)=f(P_2)=450,\quad f(P_3)=f(P_4)=150,$$

故选择点 $P_1(5,-5)$ 或 $P_2(-5,5)$ 为攀登的起点.

例 14 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使得切平面与三坐标面所围四面体体积为最小，求切点坐标.

解 设切点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，则切平面方程为

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1\Rightarrow\frac{x}{a^2/x_0}+\frac{y}{b^2/y_0}+\frac{z}{c^2/z_0}=1,$$

则目标函数为 $V=\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$，约束条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. 建立拉格朗日函数

$$L(x,,z;\lambda)=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right),$$

注意 这里化为求最大值问题了. 求偏导数，得

$$\begin{cases}L_x=yz+\frac{2\lambda}{a^2}x=0,\\ L_y=xz+\frac{2\lambda}{b^2}y=0,\\ L_z=xy+\frac{2\lambda}{c^2}z=0,\\ L_\lambda=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.\end{cases}$$

将第一、第二、第三式分别乘以 x,y,z，可解得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{-3xyz}{2\lambda},$$

代入第四式，解得 $xyz=-\frac{2}{3}\lambda$，从而解得 $x=\frac{a}{\sqrt{3}},y=\frac{b}{\sqrt{3}},z=\frac{c}{\sqrt{3}}$. 由于稳定点惟一，实际问题又必有最小值，故所求点为 $P_0\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

例 15 证明不等式 $\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\frac{(x+y)^n}{2}$，其中 $n\geqslant1,x\geqslant0,y\geqslant0$.

证 将不等式证明化为求最值问题.

设目标函数 $f(x,y)=(x^n+y^n)/2$，约束条件为：$x+y=c\ (c>0,x\geqslant0,y\geqslant0)$，则拉格朗日函数为

$$L(x,y;\lambda)=(x^n+y^n)/2+\lambda(x+y-c).$$

求偏导数，得

$$\begin{cases}L_x=nx^{n-1}/2+\lambda=0,\\ L_y=ny^{n-1}/2+\lambda=0,\\ L_\lambda=x+y-c=0.\end{cases}\Rightarrow x=y=c/2.$$

因为 $f(x,y)$ 在第一象限内有界闭线段 $x+y=c,x\geqslant0,y\geqslant0$ 上连续，故问题必有最大值和最小值. 比较点 $(c/2,c/2)$ 和两端点 $(0,c),(c,0)$ 上函数值，有

$$f(c,0)=f(0,c)=c^n/2\geqslant f(c/2,c/2)=(c/2)^n,$$

所以，函数 $f(x,y)$ 在点 $(c/2,c/2)$ 取得最小值，即

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{c}{2}\right)^n=\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

例 16 求二次型 $f(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+2dyz+2ezx+2fxy$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的最大值和最小值.

解 球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的点可表示为

$$x=\cos\theta\sin\varphi,\quad y=\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\cos\varphi,$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，则 $F(x,y,z)$ 化为 $g(\theta,\varphi)$，且 $g(\theta,\varphi)$ 在 $D=\{(\theta,\varphi)\mid 0\leqslant\theta\leqslant2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}$ 上连续，故 $g(\theta,\varphi)$ 存在最大值与最小值. 建立拉格朗日函数

$$L(x,y,z;\lambda)=F(x,y,z)+\lambda(1-x^2+y^2+z^2).$$

对 L 求偏导数，得方程组

$$\begin{cases}L_x=2(ax+fy+ez)-2\lambda x=0,\\ L_y=2(fx+by+dz)-2\lambda y=0,\\ L_z=2(ex+dy+cz)-2\lambda z=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(a-\lambda)x+fy+ez=0,\\ fx+(b-\lambda)y+dz=0,\\ ex+dy+(c-\lambda)z=0.\end{cases}$$

线性方程组有非零解的条件是方程的系数行列式等于零，即

$$\begin{vmatrix}a-\lambda & f & e\\ f & b-\lambda & d\\ e & d & c-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad \text{或} \quad A=\begin{pmatrix}a & f & e\\ f & b & d\\ e & d & c\end{pmatrix}$$

有特征值 λ.

将 $x=x_0, y=y_0, z=z_0$ 代入线性方程组，并以 x_0, y_0, z_0 分别乘以方程组第一、第二、第三式后相加，得

$$\begin{aligned}&ax_0^2+by_0^2+cz_0^2+2dy_0z_0+2ex_0z_0+2fx_0y_0\\ &=\lambda(x_0^2+y_0^2+z_0^2).\end{aligned}$$

因为 $x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$，即得 $\lambda=F(x_0,y_0,z_0)$，函数值恰为 $f(x,y,z)$ 在单位球面上的最大(小)值. 即证明二次型 $f(x,y,z)$ 在单位球面上的最大(小)值正好是其矩阵的特征值.

反之，设 $\bar{\lambda}$ 为矩阵 A 的一个特征值，设其对应特征向量 $\alpha=(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，则

$$\begin{cases}(a-\bar{\lambda})x+f\bar{y}+e\bar{z}=0,\\ f\bar{x}+(b-\bar{\lambda})\bar{y}+d\bar{z}=0,\\ e\bar{x}+d\bar{y}+(c-\bar{\lambda})\bar{z}=0.\end{cases}$$

以 $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ 分别乘以第一、第二、第三式后相加，得

$$f(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \bar{\lambda}.$$

证明 A 的任一特征值等于 $f(x,y,z)$ 在单位球面某点处的值.

从而知,二次型 $f(x,y,z)$ 在单位球面上的最大值与最小值确实存在,分别是其矩阵的最大特征值与最小特征值.

例 17 求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y-2=0$ 间的最小距离.

解 设(x,y)是 $y=x^2$ 上任意点,(u,v)为 $u-v-2=0$ 上任意点,则两点间距离 $d=\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$.

因为 d 与 d^2 有相同的最值点,故拉格朗日函数为

$$L(x,y,u,v;\lambda_1,\lambda_2)$$
$$= (x-u)^2 + (y-v)^2 + \lambda_1(y-x^2) + \lambda_2(u-v-2).$$

对 L 求偏导数,得

$$\begin{cases} L_x = 2(x-u) - 2\lambda_1 x = 0, \\ L_y = 2(y-v) - \lambda_1 = 0, \\ L_u = -2(x-u) + \lambda_2 = 0, \\ L_v = -2(y-v) - \lambda_2 = 0, \\ L_{\lambda_1} = y - x^2 = 0, \\ L_{\lambda_2} = u - v - 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/2, \\ y = 1/4, \\ u = 11/8, \\ v = -5/8. \end{cases}$$

由于稳定点惟一,而问题必有最小值.故点$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{11}{8},-\frac{5}{8}\right)$即为最小值点,最小值 $d=\frac{7}{4\sqrt{2}}$.

例 18 求原点到曲线$\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ x+y+z=1 \end{cases}$的最大距离和最小距离.

解 设 $P(x,y,z)$为曲线上任意点,则目标函数 $d(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,约束条件为 $x^2+y^2=z$ 和 $x+y+z=1$.建立拉格朗日函数

$$L(x,y,z;\lambda,\mu)$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2+y^2-z) + \mu(x+y+z-1).$$

对 L 求偏导数,得

$$\begin{cases} L_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0, \\ L_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0, \\ L_z = 2z - \lambda + \mu = 0, \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0, \\ L_\mu = x + y + z - 1 = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = (-1 - \sqrt{3})/2 \text{ 或} (-1 + \sqrt{3})/2, \\ y = (-1 - \sqrt{3})/2 \text{ 或} (-1 + \sqrt{3})/2, \\ z = 2 + \sqrt{3} \text{ 或 } 2 - \sqrt{3}, \\ \lambda = -3 - 5\sqrt{3}/3 \text{ 或 } -3 + 5\sqrt{3}/3, \\ \mu = -7 - 11\sqrt{3}/3 \text{ 或 } -7 + 11\sqrt{3}/3. \end{cases}$$

得两个稳定点.而问题必有最大值与最小值,经比较,得最大距离

$$d\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 2+\sqrt{3}\right) = \sqrt{9 + 5\sqrt{3}},$$

最小距离

$$d\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 2-\sqrt{3}\right) = \sqrt{9 - 5\sqrt{3}}.$$

第十二章　向量函数微分学

第一节　n 维欧几里德空间与向量函数

主 要 内 容

一、n 维欧几里德空间

1. 一个 n $(n\geqslant 2)$ 个有序实数组 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为一个 n 维实向量(点)，全体 n 维实向量的集合称为 n 维实向量空间，记作

$$\mathbf{R}^n=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}.$$

2. 在实向量空间上定义了加法、数乘和内积运算.

对 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，两向量之和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$.

数 α 与向量 $\boldsymbol{x}$ 的数乘为 $\alpha\boldsymbol{x}=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n)$.

向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积定义为 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$.

内积有以下性质：

(1) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant 0$，当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$；　　(2) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$；

(3) $\alpha(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})=(\alpha\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\alpha\boldsymbol{y})$，$\alpha$ 为实数；

(4) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}$.

3. 向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 的长度(范数，模)定义为

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}.$$

向量的长度有以下性质：

(1) $\|\boldsymbol{x}\| \geqslant 0$,仅当 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 时,$\|\boldsymbol{x}\|=0$;

(2) $\|\alpha \boldsymbol{x}\|=|\alpha|\,\|\boldsymbol{x}\|$,$\alpha$ 为实数;

(3) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$ (三角不等式);

(4) $\|\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|$ (柯西-施瓦兹不等式).

4. $\mathbf{R}^n$ 中任意两点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的距离定义为

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \\ &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.\end{aligned}$$

有
$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \leqslant \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\rho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}).$$

5. $U(\boldsymbol{\alpha};\delta)$ 表示点 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 的邻域,其中 $\{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha}\|<\delta\} \subset \mathbf{R}^n$ 表示以 α 为中心、δ 为半径的 n 维球形邻域,$\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2\cdots,x_n) \,\|\, x_i-\alpha_i|<\delta, i=1,2,\cdots,n\}$ 表示 n 维方形邻域.

6. $\mathbf{R}^n$ 中有类似平面点集中内点、界点、聚点、开集、闭集、凸集、区域、直径等概念.

7. 设点列 $\{\boldsymbol{P}_k\} \subset \mathbf{R}^n$,则 $\{\boldsymbol{P}_k\}$ 为收敛点列的充要条件是:$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ K>0$,当 $k>K$ 时,$\forall\ q\in\mathbf{N}$,有 $\rho(\boldsymbol{P}_k,\boldsymbol{P}_{k+\varepsilon})<\varepsilon$.

二、向量函数、极限与连续性

1. 设 $X\subset\mathbf{R}^n$,$Y\subset\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{f}$ 是 $X\times Y$ 的一个子集,对每一个 $\boldsymbol{x}\in X$,都有惟一的 $\boldsymbol{y}\in Y$,使得 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\boldsymbol{f}$,则称 $\boldsymbol{f}$ 是 X 到 Y 的向量函数,记作 $\boldsymbol{f}:X\to Y$, $\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{y}$.

2. 两个向量函数 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{g}$ 的复合函数是

$$\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}:x \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \ (X\subset\mathbf{R}^n, \boldsymbol{f}(x)\subset Y\subset\mathbf{R}^m, Z\subset\mathbf{R}^r).$$

3. 设 $D\subset X\subset\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{\alpha}$ 是 D 的聚点,$\boldsymbol{f}:X\to\mathbf{R}^m$. 若 $\exists\ \boldsymbol{l}\in\mathbf{R}^m$,$\forall$ 任意小 $U(\boldsymbol{l},\varepsilon)\subset\mathbf{R}^m$,总有 $U^\circ(\boldsymbol{\alpha};\delta)\in\mathbf{R}^n$,使得 $\boldsymbol{f}(U^\circ(\boldsymbol{\alpha};\delta)\cap D)\subset U(\boldsymbol{l};\varepsilon)$,则称在集合 D 上,当 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{\alpha}$ 时,$\boldsymbol{f}$ 以 $\boldsymbol{l}$ 为极限,记作

$$\lim_{\substack{x\to\alpha \\ x\in D}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\alpha}.$$

4. 设 $D\subset X\subset\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{\alpha}\in D$,$\boldsymbol{f}:X\to\mathbf{R}^m$. 若 $\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta>0$,使得 $\boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{\alpha};\delta)\cap D)\subset U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}),\varepsilon)$,则称 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{\alpha}$(关于集合 D)连续.

如果 f 在 D 上每一点连续，则称 f 为 D 上的连续函数.

5. 设 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}:X\to Y(X\subset\mathbf{R}^n,Y\subset\mathbf{R}^m)$；$\boldsymbol{h}:Y\to Z\subset\mathbf{R}^r$；$\alpha:X\to\mathbf{R}$；$\boldsymbol{a}\in X,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\in Y$. 若 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g},\alpha$ 在点 $\boldsymbol{a}$ 连续，$\boldsymbol{h}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 连续，则向量函数 $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g},\alpha\boldsymbol{f}$ 及 $\boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{g}$ 均在点 $\boldsymbol{a}$ 连续.

6. 若 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是有界闭集，$\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$ 是 D 上的连续函数，则 $\boldsymbol{f}(D)\subset\mathbf{R}^m$ 也是有界闭集.

7. 若 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是有界闭集，$\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$ 是 D 上的连续函数，则 $\boldsymbol{f}(D)$的直径是可达的，即$\exists\ \boldsymbol{P}',\boldsymbol{P}''\in D$，使得

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{P}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{P}'')\|=\max_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in D}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')\|.$$

8. 若 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是有界闭集，$\boldsymbol{f}$ 是 D 上的连续函数，则 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上一致连续. 即$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta(\varepsilon)>0$，只要 $\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in D$，且 $\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''\|<\delta$，就有 $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')\|<\varepsilon$.

9. 若 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是道路连通集，$\boldsymbol{f}$ 是 D 上的连续函数，则 $\boldsymbol{f}(D)\subset\mathbf{R}^m$ 也是道路连通集.

方法、技巧与典型例题分析

本节的问题是辨析概念，如何将一维区域中的概念拓广到 n 维空间. 这需要认真分析，回顾、利用单变量函数中的结论和证明.

例 1 设 $A\subset\mathbf{R}^m,B\subset\mathbf{R}^m$，证明：

(1) $(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ$； (2) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

这里 A°是 A 的内点集，B°是 B 的内点集.

证 (1) 因为 $A^\circ\subset A,B^\circ\subset B$，所以 $A^\circ\cap B^\circ\subset A\cap B$，而 $A^\circ\cap B^\circ$为开集，故 $A^\circ\cap B^\circ=(A^\circ\cap B^\circ)^\circ=(A\cap B)^\circ$.

反之，由 $A\cap B\subset A,A\cap B\subset B$，故$(A\cap B)^\circ\subset A^\circ,(A\cap B)^\circ\subset B^\circ$，得出$(A\cap B)^\circ\subset A^\circ\cap B^\circ$.

综上所述，得 $(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ$.

(2) 由于 $\overline{E}=((E^C)^\circ)^C$，故

$$\overline{A}\cup\overline{B}=((A^C)^\circ)^C\cup((B^C)^\circ)^C=((A^C)^\circ\cap(B^C)^\circ)^C$$

$$=((A^{C}\cap B^{C})^{\circ})^{C}=(((A\cup B)^{C})^{\circ})^{C}=\overline{A\cup B}.$$

例 2 设 $\{\boldsymbol{P}_k\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的点列，$\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$，$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{P}_k=\boldsymbol{a}$，证明：$\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{P}_k\|=\|\boldsymbol{a}\|$.

证 由 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{P}_k=\boldsymbol{a}$ 知，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，使得 $\forall\ k>N$，恒有 $\|\boldsymbol{P}_k-\boldsymbol{a}\|<\varepsilon$. 又由三角不等式 $\|\boldsymbol{P}_k-\boldsymbol{a}\|\geqslant\|\boldsymbol{P}_k\|-\|\boldsymbol{a}\|$，所以

$$|\,\|\boldsymbol{P}_k\|-\|\boldsymbol{a}\|\,|<\varepsilon,\quad 即\quad \lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{P}_k\|=\|\boldsymbol{a}\|.$$

例 3 设 F_1,F_2 是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭集，且 $F_1\cap F_2=\varnothing$. 证明：存在开集 G_1 和 G_2，使得 $G_1\cap G_2=\varnothing$，而 $G_1\supset F_1$，$G_2\supset F_2$.

证 由题设，对 $\boldsymbol{x}\in F_1$，有 $\rho(\boldsymbol{x},F_2)>0$；对 $\boldsymbol{y}\in F_2$，有 $\rho(\boldsymbol{y},F_1)>0$. 作邻域 $U(\boldsymbol{x},\delta_1)$ 与 $U(\boldsymbol{y},\delta_2)$，其中 $\delta_1=\dfrac{1}{2}\rho(\boldsymbol{x},F_2)$，$\delta_2=\dfrac{1}{2}\rho(\boldsymbol{y},F_1)$，再令 $G_1=\bigcup\limits_{x\in F_1}U(\boldsymbol{x},\delta_1)$，$G_2=\bigcup\limits_{y\in F_2}U(\boldsymbol{y},\delta_2)$. 可知，$G_1,G_2$ 是开集，且 $G_1\supset F_1$，$G_2\supset F_2$.

用反证法. 设 $G_1\cap G_2\neq\varnothing$，则有 $\alpha\in G_1\cap G_2$，使得 $\boldsymbol{x}_0\in F_1$，$\boldsymbol{y}_0\in F_2$，且 $\alpha\in U(\boldsymbol{x}_0,\delta_1)$，$\alpha\in U(\boldsymbol{y}_0,\delta_2)$. 不妨设 $\delta_1\geqslant\delta_2$，则

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{x}_0,F_2)&\leqslant\rho(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})\leqslant\rho(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\alpha})+\rho(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{y}_0)\\&<\delta_1+\delta_1\leqslant2\delta_1=2\rho(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{F}_2).\end{aligned}$$

引出矛盾，故 $G_1\cap G_2=\varnothing$.

例 4 设 $E\subset\mathbf{R}^m$ 是闭集，$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^m$，证明：

(1) $\exists\ \boldsymbol{y}\in E$，使得 $\rho(\boldsymbol{x},E)=\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$；

(2) 若 $\boldsymbol{x}\overline{\in}E$，则 $\rho(\boldsymbol{x},E)>0$.

证 (1) 由距离的定义，$\exists\ \boldsymbol{y}_n\in E\ (n=1,2,\cdots)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_n)=\rho(\boldsymbol{x},E)$.

又 $|\boldsymbol{y}_n|\leqslant|\boldsymbol{y}_n-\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{x}|=\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_n)+|\boldsymbol{x}|$，所以数列 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_n)$ 有界，从而 $|\boldsymbol{y}_n|$ 有界. 于是存在子列 $\{\boldsymbol{y}_{n_k}\}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{y}_{n_k}=\boldsymbol{y}$. 由于 E 是闭集，所以 $\boldsymbol{y}\in E$，则由 $\lim\limits_{k\to\infty}\rho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}_{n_k})=0$ 及 $|\rho(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_{n_k})-\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\leqslant\rho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}_{n_k})$，得 $\lim\limits_{k\to\infty}\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_{n_k})=\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})\Rightarrow\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\rho(\boldsymbol{x},E)$.

(2) 因 $x\neq y$，由题(1)得 $\rho(x,E)=\rho(x,y)>0$.

例 5 设集列 $\{A_n\}$ 为一非空闭集套，即 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$，且满足 $\rho(A_n)\triangleq\sup\limits_{x,y\in A_n}|x-y|\to 0\ (n\to\infty)$. 证明：交集 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 非空且仅含惟一点 x.

证 因为 A_n 非空，故可取 $x_n\in A_n, n=1,2,\cdots$. 则 $\{x_n\}$ 为柯西基本收敛点列. 事实上，因为 $A_n\supset A_{n+1}$，所以 $x_{n+m}\in A_{n+m}\subset A_m, m=0,1,\cdots$，于是

$$|x_{n+m}-x_n|\leqslant\sup_{x,y\in A_n}|x-y|=\rho(A_n)\to 0\ (n\to\infty).$$

由柯西审敛原理知，存在惟一的 x，使得当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to x$. 而 A_n 为闭集，故 $x\in A_n$，即 $x\in\bigcap\limits_{x=1}^{\infty}A_n$，非空.

若另有一 $y\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，则 $x,y\in A_n$, $n=1,2,\cdots$，且 $|x-y|\leqslant\rho(A_n)\to 0\ (n\to\infty)$，即 $y=x$. 从而 x 惟一.

例 6 设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 为一点集，$f:A\to\mathbf{R}^m$ 为 n 元向量函数. 证明：f 在 A 上连续等价于它的每个分量在 A 上连续.

证 设 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$，$\forall\ x_0=(x_{0,1},x_{0,2},\cdots,x_{0,n})\in A$，$f(x)$ 在 x_0 连续的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，而 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 等价于 $\lim\limits_{x\to x_0}f_k(x)=f_k(x_0)$，即每个 $f_k(x)$ 在 $x_{0,k}$ 连续 $(k=1,2,\cdots,m)$. 故 f 在 A 上连续等价于它的每个分量在 A 上连续.

例 7 设 f 是集合 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 上的 n 元向量函数，证明：f 在 $x_0\in A$ 连续 $\Leftrightarrow$ 对 A 中任何收敛于 x_0 的点列 $\{x_k\}$，都有

$$\lim_{k\to\infty}f(x_k)=f(x_0).$$

证 设 $f=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，$\forall\ x_0\in A\subseteq\mathbf{R}^n$，则 f 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f_l(x)=f_l(x_0)$ $(x_0=(x_{0,1},x_{0,2},\cdots,x_{0,n}), l=1,2,\cdots,m)$.

由海涅(Heine)定理知，$\forall$ 任何收敛于 x_0 的点列 $\{x_k\}$ 都有

$$\lim_{k\to\infty} f_l(\boldsymbol{x}_k)=f_l(\boldsymbol{x}_0)\ (l=1,2,\cdots,m).$$

故命题得证.

例 8 设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbf{R}^m$ 上连续,并满足:

(1)$\boldsymbol{x}\neq\theta$ 时,$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})>0$; (2) $\forall$ $\boldsymbol{x}$ 和 $c>0$,$\boldsymbol{f}(c\boldsymbol{x})=c\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

证明:$\exists$ $a>0,b>0$,使得 $a|\boldsymbol{x}|\leqslant \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\leqslant b|\boldsymbol{x}|$.

证 设有有界闭集 $A=\{\boldsymbol{x}\,\big|\,|\boldsymbol{x}|=1\}$. 由于 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 A 上连续,则在 S 上点 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$,$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$有最大值 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)>0$ 和最小值 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)>0$. 记 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)=b$,$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)=a$. 于是,$\forall$ $x\in\mathbf{R}^m\backslash\theta$,$\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|\in S$,有

$$a\leqslant \boldsymbol{f}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right)\leqslant b,\quad 即\quad a|\boldsymbol{x}|\leqslant \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\leqslant b|\boldsymbol{x}|.$$

例 9 设非空子集 $A\subset\mathbf{R}^n$,定义 $\boldsymbol{x}$ 到 A 的距离

$$f_A(\boldsymbol{x})=\inf_{y\in A}\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\rho(\boldsymbol{x},A),$$

证明:$f_A(\boldsymbol{x})$是 $\mathbf{R}^n$ 上的一致连续函数.

证 $\forall$ $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\mathbf{R}^n$,$\forall$ $\boldsymbol{y}\in A$,有

$$\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})\leqslant\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)+\rho(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}).$$

故 $$\inf_{y\in A}\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})\leqslant\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)+\rho(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})\ (\forall\ \boldsymbol{y}\in A),$$

从而 $$\inf_{y\in A}\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})\leqslant\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)+\inf_{y\in A}\rho(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}),$$

即 $$\inf_{y\in A}\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})-\inf_{y\in A}\rho(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})\leqslant\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2).$$

类似地,有

$$\inf_{y\in A}\rho(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})-\inf_{y\in A}\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})\leqslant\rho(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)=\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2),$$

因此 $$\left|\inf_{y\in A}\rho(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})-\inf_{y\in A}\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})\right|\leqslant\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2).$$

所以,$\forall$ $\varepsilon>0$,$\exists$ $\delta=\varepsilon$,当 $\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)<\delta$ 时,有

$$\begin{aligned}|\rho(\boldsymbol{x}_2,A)-\rho(\boldsymbol{x}_1,A)|&=\left|\inf_{y\in A}\rho(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})-\inf_{y\in A}\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})\right|\\&\leqslant\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)<\varepsilon,\end{aligned}$$

即 $\rho(\boldsymbol{x},A)$在 $\mathbf{R}^n$ 上一致连续.

例 10 设 $f(\boldsymbol{x})$在 $D\subset\mathbf{R}^n$ 内连续. 证明:$f(x)$在 D 内一致连续$\Leftrightarrow\forall$ $\boldsymbol{x}_0\in\partial D$,$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in D}}f(x)$存在. 这里 ∂D 表示 D 的全体边界点组成

的集合.

证　必要性　因为 $f(x)$ 在 D 上一致连续，则 $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，当 $x,y\in D,\rho(x,y)<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

设 $x_0\in\partial D$，而 D 为开区域，故 x_0 为 D 的聚点，设 $x_n\in D,x_n\to x_0$（当 $n\to\infty$）为任一趋向于 x_0 的序列，则对上述 $\delta>0,\exists\ N>0$，当 $n,m>N$ 时，有 $\rho(x_n,x_m)<\delta$，从而 $|f(x_n-f(x_n)|<\varepsilon$. 依柯西收敛原理，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 存在，由 x_n 的任意性，依海涅定理，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in D}}f(x)$ 存在.

充分性　设 $\forall\ x_0\in\partial D,\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in D}}f(x)$ 存在. 定义 $f(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in D}}f(x)$.

于是，$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，当 $x\in D,\rho(x,y)<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 又对于 $x_1\in\partial D$，若 $\rho(x_1,x_0)<\delta$，则对前式取 $x\to x_1$ 的极限，得到 $|f(x_1)-f(x_0)|\leqslant\varepsilon$.

故 $\forall\ x\in\overline{D}=D\cup\partial D$，当 $\rho(x,x_0)<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|\leqslant\varepsilon$. 因为 f 在 D 内连续，则 f 在 $\overline{D}$ 连续. 从而 f 在 $\overline{D}$ 上也就是在 D 上一致连续.

例 11　设点集 $A\subseteq\mathbf{R}^n$，$f:A\to\mathbf{R}^n$ 是 n 元向量值函数，证明下列命题等价：

(1) f 在 A 上连续；

(2) 开集 $B\subseteq\mathbf{R}^m$，则 B 关于 f 的原像 $f^{(-1)}(B)=\{x|x\in A,f(x)=B\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集.

证　设 f 在 A 上连续，则 f 是 A 上的连续函数. 又 $B\subseteq\mathbf{R}^m$ 是开集，当 $f^{-1}(B)\neq\varnothing$ 时，$\forall\ x_0\in f^{(-1)}(B)$，因为 B 是开集，所以 $\exists\ \varepsilon>0$，使得 $U(f(x_0);\varepsilon)\subset B$. 同时，由 f 的连续性，$\exists\ \delta>0$，使得 $f(U(x_0,\delta))\subset U(f(x)_0;\delta)$. 此时，$x\in U(x,\delta)$；$f(x)\in U(f(x_0),\varepsilon)\subset B$，从而 $U(x_0,\delta)\subset f^{(-1)}(B)$. 即 $f^{-1}(B)$ 中每一点都是内点，故 $f^{-1}(B)$ 是开集.

反之，设 f 是 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的映射，且对 $\mathbf{R}^n$ 中任何开集，$f^{-1}(B)$ 是开集. $\forall\ x_0\in\mathbf{R}^n,\varepsilon>0$，取 $\mathbf{R}^m$ 中开集 $B=U(f(x_0),\varepsilon)$，其原像

$f^{-1}(B)$必为开集. 因为 $x_0\in f^{(-1)}(B)$,故 x_0 是 $f^{-1}(B)$的内点,从而存在 $\delta>0$,使得 $U(x_0,\delta)\subset f^{-1}(B)$. 这等价于 $f(U(x_0);\delta)\subset B$. 故$f(U(x_0;\delta))\subset U(f(x_0);\varepsilon)$.

第二节　向量函数的微分

主 要 内 容

1. 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为开集,$x_0\in D$,$f:D\to\mathbf{R}^m$. 如果存在某个线性变换 A(只依赖于 x_0),使得 $x\in U(x_0)\subset D$ 时,有

$$f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+o(\|x-x_0\|)$$

或
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)}{\|x-x_0\|}=0,$$

则称向量函数 f 在点 x_0 可微(或可导). 若线性变换 A 相联系的矩阵为 $A(m\times n)$,则称 $A\cdot(x-x_0)=A(x-x_0)$为 f 在点 x_0 的微分,并称 A 为 f 在点 x_0 的导数,记作 $Df(x_0)$或 $f'(x_0)$.

如果 f 在 D 中任何点可微,则称 f 是 D 上的可微函数.

2. 若向量函数 f 在 x_0 可微,则 f 在 x_0 连续.

3. 若向量函数 f 在 x_0 可微,则 f 的所有 m 个坐标函数 f_i $(i=1,2,\cdots,m)$在 x_0 关于每个自变量 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$的一阶偏导数$\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x=x_0}$都存在. 由这些偏导数组成的矩阵便是 f 在 x_0 的导数.

4. 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为开集,$x\in D$,$f:D\to\mathbf{R}^m$,则 f 在 x_0 可微的充要条件是:存在一个(m 行 n 列的)矩阵函数 $F:D\to\mathbf{R}^{mn}$,它在 x_0 连续(相当于它的 n 个列向量函数都在 x_0 连续),并使得

$$f(x)-f(x_0)=F(x)(x-x_0),\ x\in D.$$

以下所设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 均为开集.

5. 设 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}:D\to\mathbf{R}^m$ 是在 $\boldsymbol{x}_0\in D$ 可微的函数,c 为任意实数,则 $c\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{f}\pm\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 也可微,且有

$$(c\boldsymbol{f})'(\boldsymbol{x}_0)=c\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0),\quad (\boldsymbol{f}\pm\boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\pm\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0).$$

6. 设 $\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in D$ 可微;$D'\subset\mathbf{R}^m$ 也是开集,$\boldsymbol{f}(D)\subset D'$;$\boldsymbol{g}:D'\to\mathbf{R}^r$ 在 $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$可微. 则复合函数 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{h}:D\to\mathbf{R}^r$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微,且 $\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{x}_0)=(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{h})'(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}_0)\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$.

7. 微分中值不等式　设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是凸开集,$\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$. 若 $\boldsymbol{f}$ 在 D 可微,则对任何两点 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in D$,必存在点 $\xi=\boldsymbol{a}+\theta(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$,$0<\theta<1$,使得 $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\|\leqslant\|\boldsymbol{f}'(\xi)\|\ \|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\|$.

8. 对于 n 元实值函数 $f:D\to\mathbf{R}$,$D\subset\mathbf{R}^n$ 为开集,如果 f 在 D 可导,则由 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$确定 f 的导函数 $\boldsymbol{f}':D\to\mathbf{R}^n$ 是一个向量函数. 若 $\boldsymbol{f}'$还在 D(或 D 上某点)可微,则称 f 在 D 上二阶可微. 定义$(\boldsymbol{f}')^{\mathrm{T}}$ 的导数为 f 的二阶导数,记作 $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x})$.

$$\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x})(=D^2f(x))=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}.$$

矩阵称为函数 f 的黑塞矩阵.

9. 极值必要条件　设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为开集,实值函数 $f:D\to\mathbf{R}$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in D$ 可微,且取极值,则

(1) $\boldsymbol{x}_0$ 必为 $\boldsymbol{f}$ 的稳定点,即有 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)=\mathbf{0}$.

(2) 若 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域存在二阶偏导数,则当 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$为极小值时,黑塞矩阵 $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}_0)$为正定或正半定;当 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$为极大值时,黑塞矩阵 $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}_0)$为负定或负半定.

若 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的黑塞矩阵 $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}_0)$是不定的,则 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 无极值.

10. 极值充分条件　实值函数 $f:D\to\mathbf{R}$ 若在 $U(\boldsymbol{x}_0)\subset D$ 存在二阶连续偏导数，且 $f'(\boldsymbol{x}_0)=\mathbf{0}$，则当 $f''(\boldsymbol{x}_0)$ 为正定(或负定)时，f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 取严格极小值(或极大值)；当 $f''(\boldsymbol{x}_0)$ 为正半定(或负半定)时，f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 取极小值(或极大值).

疑 难 解 析

1. 数量函数的导数与向量函数的导数有何不同?

答　数量函数的导函数是一个数量函数，数量函数在某一点的导数是一个数值. 但是向量函数的导数仍是一个向量函数，向量函数在某一点的导数是一个数量矩阵. 例如

若向量函数 $\boldsymbol{f}:X\to\mathbf{R}^4$ $(X=\{(x_1,x_2)\mid -\infty<x<+\infty, x_2>0\}\subset\mathbf{R}^2)$ 为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2)=(x_1^2x_2^3, \mathrm{e}^{x_1+x_2}, x_2, x_1\ln x_2)^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}2x_1x_2^3 & 3x_1^2x_2^2\\ \mathrm{e}^{x_1+x_2} & \mathrm{e}^{x_1+x_2}\\ 0 & 1\\ \ln x_2 & x_1/x_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{f}'(1,1)=\begin{bmatrix}2 & 3\\ \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

方法、技巧与典型例题分析

向量函数与数量函数的导数与微分虽然在形式上有较大的差异，但其概念本质上是一致的. 所以，我们仍然可以利用数量函数导数与微分的方法与技巧来解向量函数的题目.

例 1　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$a_{ij}$ 为常数，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\alpha}$ 为常向量，求 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$.

解　$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\alpha}-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}+\mathbf{0}$.
故依定义，有

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}.$$

例 2　求下列向量函数的雅可比矩阵：

(1) $\boldsymbol{f}(x,y)=(x^2+\sin y, 2xy)^{\mathrm{T}}$；

(2) $\boldsymbol{f}(x,y)=(x^2,xy,y^2)^{\mathrm{T}}$;

(3) $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(x\cos y,ye^x,\sin(xz))^{\mathrm{T}}$.

解 求雅可比矩阵,即求 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$(或 $\boldsymbol{A}$).

(1) $D\boldsymbol{f}(x,y)$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+\sin y) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2+\sin y)\\ \frac{\partial}{\partial x}(2xy) & \frac{\partial}{\partial y}(2xy)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x & \cos y\\ 2y & 2x\end{bmatrix}.$$

(2) $$D\boldsymbol{f}(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}(x^2) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2)\\ \frac{\partial}{\partial x}(xy) & \frac{\partial}{\partial y}(xy)\\ \frac{\partial}{\partial x}(y^2) & \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x & 0\\ y & x\\ 0 & 2y\end{bmatrix}.$$

(3) $$D\boldsymbol{f}(x,y,z)=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}(x\cos y) & \frac{\partial}{\partial y}(x\cos y) & \frac{\partial}{\partial z}(x\cos y)\\ \frac{\partial}{\partial x}(ye^x) & \frac{\partial}{\partial y}(ye^x) & \frac{\partial}{\partial z}(ye^x)\\ \frac{\partial}{\partial x}(\sin(xz)) & \frac{\partial}{\partial y}(\sin(xz)) & \frac{\partial}{\partial z}(\sin(xz))\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos y & -x\sin y & 0\\ ye^x & e^x & 0\\ z\cos(xz) & 0 & x\cos(xz)\end{bmatrix}.$$

例 3 求下列函数的导数和微分:

(1) $\boldsymbol{f}(x,y)=(x^2-y^2,2xy)^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{f}'(1,1)$,$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(1,1)$;

(2) $\boldsymbol{f}(x,y)=(x\sin y,(x-y)^2,2y^2)^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{f}'(x,y)$,$\boldsymbol{f}(0,\pi/2)$;

(3) $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(x^2+y,ye^{x+z})^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{f}'(1,0,1)$和 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(1,0,1)$.

解 (1) $\boldsymbol{f}'(x,y)=\begin{bmatrix}2x & -2y\\ 2y & 2x\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{f}'(1,1)=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}$,

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(1,1)=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}\Delta x-\Delta y\\ \Delta x+\Delta y\end{bmatrix}.$$

(2) $\boldsymbol{f}'(x,y)=\begin{bmatrix}\sin y & x\cos y\\ 2(x-y) & -2(x-y)\\ 0 & 4y\end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{f}'\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\pi & \pi\\ 0 & 2\pi\end{bmatrix}.$$

(3) $\boldsymbol{f}'(x,y,z)=\begin{bmatrix}2x & 1 & 0\\ ye^{x+z} & e^{x+z} & ye^{x+z}\end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{f}'(1,0,1)=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & e^2 & 0\end{bmatrix}=A,$$

$$d\boldsymbol{f}(1,0,1)=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\Delta x+\Delta y\\ e^2\Delta y\end{bmatrix}.$$

例 4 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})=\begin{bmatrix}u_1^2-u_2u_3\\ u_1u_3-u_2^2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}x_1\cos x_2\\ x_2\sin x_1\\ x_1^2e^{x_2}\end{bmatrix}$,

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{w}=(w_1,w_2)^{\mathrm{T}}$,

求 $D(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})\Big|_{(1,0)^{\mathrm{T}}}$, $\dfrac{\partial w_1}{\partial x_1}\Big|_{(1,0)^{\mathrm{T}}}$, $\dfrac{\partial(w_1,w_2)}{\partial(x_1,x_2)}\Big|_{(1,0)^{\mathrm{T}}}$.

解 由复合函数导数公式,得

$$D(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}2u_1 & -u_3 & -u_2\\ u_3 & -2u_2 & u_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos x_2 & -x_1\sin x_2\\ x_2\cos x_1 & \sin x_1\\ 2x_1e^{x_2} & x_1^2e^{x_2}\end{bmatrix},$$

而当 $(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}=(1,0)^{\mathrm{T}}$ 时,$(u_1,u_2,u_3)^{\mathrm{T}}=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$,故

$$D(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})\Big|_{(1,0)^{\mathrm{T}}}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \sin 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -\sin 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}.$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\Big|_{(1,0)^{\mathrm{T}}}=2,\quad \frac{\partial(w_1,w_2)}{\partial(x_1,x_2)}\Big|_{(1,0)^{\mathrm{T}}}=\begin{vmatrix}2 & -\sin 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=2+3\sin 1.$$

例 5 求下列向量函数在指定点的导数:

(1) $\boldsymbol{f}(x,y)=(\arctan x,\mathrm{e}^{xy})^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{f}'(1,0)$；

(2) $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(x^2y,y^2+z^2)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{f}'(1,1,1)$；

(3) $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(\sin(x^2-y^2),\ln(x^2+y^2),1/\sqrt{x^2+y^2})^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{f}'(1,1,1)$.

解 先求 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$，再求具体值.

(1) $$D\boldsymbol{f}(x,y)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{1+x^2} & 0\\ y\mathrm{e}^{xy} & x\mathrm{e}^{xy}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{f}'(1,0)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2} & 0\\ 0 & \mathrm{e}\end{bmatrix}.$$

(2) $$D\boldsymbol{f}(x,y,z)=\begin{bmatrix}2xy & x^2 & 0\\ 0 & \dfrac{-2y}{(y^2+z^2)^2} & \dfrac{-2z}{(y^2+z^2)^2}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}'(1,1,1)=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

(3) $D\boldsymbol{f}(x,y,z)$

$$=\begin{bmatrix}2x\cos(x^2-y^2) & -2y\cos(x^2-y^2) & 0\\ \dfrac{2x}{x^2+y^2} & 0 & \dfrac{2z}{x^2+z^2}\\ 0 & -\dfrac{y}{(y^2+z^2)^{3/2}} & -\dfrac{z}{(y^2+z^2)^{3/2}}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}'(1,1,1)=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\end{bmatrix}.$$

例 6 设向量函数 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 的坐标分量函数

$$\begin{cases}x=\cos u\sin v,\\ y=\sin u\cos v,\end{cases}$$

向量函数 $\boldsymbol{g}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 的坐标分量函数 $u=s+t,v=s-t$. 求 $D(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})$.

解 $$\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}=\begin{bmatrix}\cos(s+t)\sin(s-t)\\ \sin(s+t)\cos(s-t)\end{bmatrix},$$

$$D(f\circ y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t}\\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\sin u\sin v & \cos u\cos v\\ \cos u\cos v & -\sin u\sin v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\cos(u+v) & -\cos(u-v)\\ \cos(u+v) & \cos(u-v)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\cos 2s & \cos 2t\\ \cos 2s & \cos 2t\end{bmatrix}.$$

例 7 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为开域，$f:D\to\mathbf{R}^n$ 为可微函数，证明：

(1) 若在 D 上 $f'(x)$ 恒为零矩阵，则 $f(x)$ 为常向量函数；

(2) 若在 D 上 $f'(x)\equiv c$（常数阵），则 $f=cx+e, x\in D, e\in\mathbf{R}^m$.

证 当 D 为凸开集，f 在 D 可微时，$\forall\, a,b\in D$，$\exists\ \xi=a+\theta(b-a)$，$0<\theta<1$，使得

$$\|f(b)-f(a)\|\leqslant\|f'(\xi)\|\ \|b-a\|.$$

(1) 若 $f'(x)\equiv 0$，则 $\|f'(\xi)\|=0$，由上式得 $\|f(b)-f(a)\|=0$，即 $f(a)=f(b)$. 由 a,b 的任意性，$f(x)$ 为常向量函数.

(2) 若 $f'(x)\equiv c$，则 $\|f'(\xi)\|=d$（d 为常数）. 于是

$$\|f(b)-f(a)\|\leqslant d\|b-a\|,$$

显然 $f(x)$ 是 x 的线性函数. 设 $f(x)=cx+e$，则由本节例 1 知

$$f(x+\Delta x)-f(x)=c(x+\Delta x)+e-(cx+e)$$
$$=c\Delta x+0\Rightarrow f'(x)=c.$$

例 8 设 $f(x_1,x_2)=x_1-x_2$，$g(x)=(\sin x,\cos x)^{\mathrm{T}}$，$s(x_1,x_2)=(x_1^2,2x_2,x_2+4)^{\mathrm{T}}$，$t(x_1,x_2,x_3)=(x_1x_2x_3,x_1+x_2+x_3)$. 求 (1) $(f\circ g)'$；(2) $(g\circ f)'$；(3) $(s\circ t)'$；(4) $(t\circ s)'$.

解 (1) $(f\circ g)=\sin x-\cos x$，　$(f\circ g)'=\cos x+\sin x$.

(2) $(g\circ f)=(\sin(x_1-x_2),\ \cos(x_1-x_2))^{\mathrm{T}}$，

$$(g\circ f)'=\begin{bmatrix}\cos(x_1-x_2) & -\cos(x_1-x_2)\\ -\sin(x_1-x_2) & \sin(x_1-x_2)\end{bmatrix}.$$

(3) $(s\circ t)=(x_1^2x_2^2x_3^2,\ 2(x_1+x_2+x_3),\ x_1+x_2+x_3+x_4)^{\mathrm{T}}$，

$$(s\circ t)'=\begin{bmatrix}2x_1x_2^2x_3^2 & 2x_1^2x_2x_3^2 & 2x_1^2x_2^2x_3\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

(4) $(t\circ s)=(2x_1^2x_2(x_2+4),\quad x_1^2+3x_2+4)^{\mathrm{T}}$,

$$(t\circ s)'=\begin{bmatrix}4x_1x_2(x_2+4) & 4x_1^2x_2+8x_1^2\\ 2x_1 & 3\end{bmatrix}.$$

例 9 设 $D\subseteq\mathbf{R}^n$ 为凸有界闭域，$f(x)$在 D 上有一阶连续偏导数. 证明：$f(x)$在 D 上满足李卜希兹条件. 即$\exists\ L>0,\forall\ x_1,x_0\in D$，有$|f(x)-f(x_0)|\leqslant L|x-x_0|$.

证 由条件知，$\exists\ M>0$，使得

$$|f'_{x_i}(x)|\leqslant M,\quad \forall\ x\in D,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

因为 D 是凸区域，依泰勒公式，$\forall\ x,x_0\in D,\exists\ x^*\in\overline{xx_0}\subset D$，使得

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)(x_i-x_{0,i})\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)\right||x_i-x_{0,i}|\leqslant Mn\rho(x,x_0).$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),x_0=(x_{0,1},x_{0,2},\cdots,x_{0,n})$. 令 $L=Mn$，则

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant L|x-x_0|.$$

例 10 设 $f,g:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$ 是可微函数，用复合函数求导法则证明向量内积的求导公式：

$$D(f(x)\cdot g(x))=f^{\mathrm{T}}(x)Dg(x)+g^{\mathrm{T}}(x)Df(x)$$

证 设 $\qquad F:\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}$,

$$F(u)=F(u_1,\cdots,u_n,u_{n+1},\cdots,u_{2n})=\sum_{i=1}^{n}u_iu_{n+i},$$

$$G:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^{2n},$$

$$u=G(x)=(f_1(x),\cdots f_n(x),g_1(x),\cdots,g_n(x)),$$

则$(F\circ G)(x)=f(x)\cdot g(x)$. 因为 F 的 $2n$ 个偏导数连续，所以 F 可微. 又 G 的每个分量可微，所以 G 也可微. 从而由复合函数求导

法则与分块矩阵乘法法则，得

$$D(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))=D(F\circ G)(\boldsymbol{x})=DF(\boldsymbol{u})DG(\boldsymbol{x})$$

$$=(u_{n+1},\cdots,u_{2n},u_1,\cdots,u_n)\begin{pmatrix}D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\\ D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}$$

$$=(u_{n+1},\cdots,u_{2n})D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+(u_1,\cdots,u_n)D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$

$$=\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(x)D\boldsymbol{g}(x).$$

例 11 设 $\boldsymbol{f}$ 是定义在区域 $D\subseteq\mathbf{R}^n$ 上的向量值函数，$\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in D$ 可微，证明：$\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处沿任何方向 $\boldsymbol{l}$ 的向量导数存在，且

$$D_l\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_l)\ (\boldsymbol{e}_l\text{ 为向量 }\boldsymbol{l}\text{ 的单位向量}).$$

证 因为 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微，所以 $\boldsymbol{f}$ 的分量 f_i 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微. 故 f_i 在 $\boldsymbol{x}_0$ 沿任何方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数存在，且 $\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial \boldsymbol{l}}=\mathbf{grad}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{e}_l$.

由此知，$\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 沿任何方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数存在，且 $D_l\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_l)$.

例 12 $\boldsymbol{f}$ 是定义在 $D\subseteq\mathbf{R}^n$ 上的向量值函数，$\boldsymbol{x}_0\in D$，若 $\dfrac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_j}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的某邻域存在，且在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续. 证明：$\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微.

证 因为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的每个分量 $f_i(\boldsymbol{x})$ 都是数量值函数，由于数量值函数 f_i 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微的充要条件是 f_i 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域内存在偏导数 $\dfrac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}$ $(j=1,2,\cdots,n)$，且所有偏导数都在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续. 所以由题设知，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的所有分量 $f_i(\boldsymbol{x})$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 都在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微. 从而，由向量值函数可微的充要条件知，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 可微.

例 13 设 $D\subset\mathbf{R}^m$ 是凸域，$f(\boldsymbol{x})\in C^2(D,\mathbf{R})$，且满足 $f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{x}_0)+Df(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$ $(\forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0\in D)$. 证明：$f(\boldsymbol{x})$ 的黑塞矩阵 $H_f(\boldsymbol{x})$ 是正半定的.

证 $\forall\ \boldsymbol{x}_0\in D$，$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^m$ 为任一向量，当 t 充分小时，点 $\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\in D$. 由泰勒公式，得

$$f(\boldsymbol{x}_0)+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$$

$$= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) + D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$$
$$+ \frac{t^2}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}} H_f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + o(t^2|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^2).$$

由题设条件可以得出

$$\frac{t^2}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}} H_f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + o(t^2|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^2) \geqslant 0,$$

消去 t^2，令 $t \to 0$，得

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}} H_f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \geqslant 0.$$

即知 $H_f(\boldsymbol{x}_0)$是正半定的. 由于 $\boldsymbol{x}_0$ 的任意性，所以 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的黑塞矩阵在 D 上是正半定的.

例 14 证明：设 $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0 \in \mathbf{R}^n$，$S$ 是连接 $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0$ 的线段，D 是包含 S 的区域，$\boldsymbol{f}: D \to \mathbf{R}^m$ 连续，在 S($\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0$ 可除外)上可微，则存在 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \in S$，使得

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \left[\frac{\partial f_i(\xi_i)}{\partial x_j}\right]_{m \times n}(\boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{x}_0)$$

成立. 该式称为向量值函数的拉格朗日公式.

证　设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$，$f_i(\boldsymbol{x}) = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是数量值函数. 在 $f_i(x)$中，固定 $x_2, x_3, \cdots, x_n$，则

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) - f_i(x_{0,1}, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\partial f_i(\xi_{i,1})}{\partial x_1}(x_1 - x_{0,1}).$$

事实上，此时 f_i 为一元函数，由一元函数的拉格朗日公式即可得到结果. 同样可以得到 $f_i(x)$关于各个变量 x_i 的拉格朗日公式. 令

$$\xi_i = (\xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \cdots, \xi_{i,n}),\ (x_{0,1}, x_{0,2}, \cdots, x_{0,n}) = \boldsymbol{y}_0,$$

取 $i = 1, 2, \cdots, m$；$j = 1, 2, \cdots, n$，即得 n 元向量值函数的拉格朗日公式

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \left[\frac{\partial f_i(\xi_i)}{\partial x_j}\right]_{m \times n}(\boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{x}_0).$$

例 15 讨论二次函数 $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + c$ 的极值. 其中 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ 为变量，$\boldsymbol{A}$ 为 $n \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{b}$ 为 $n \times 1$ 向量，c 为实数.

解 因为 $f'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\overset{令}{=\!=}\boldsymbol{0}$，故 $f(\boldsymbol{x})$ 的稳定点为 $\boldsymbol{x}_0=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$（设 $\boldsymbol{A}$ 可逆）. 再求得 f 的黑塞矩阵 $f''(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}$. 所以

当 $\boldsymbol{A}$ 为正定时，$f(\boldsymbol{x}_0)$ 为极小值.

当 $\boldsymbol{A}$ 为负定时，$f(\boldsymbol{x}_0)$ 为极大值.

由极值点的惟一性知，$f(\boldsymbol{x}_0)$ 为 f 的最大值或最小值，有

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_0) &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}) + c \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} + c = -\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} + c. \end{aligned}$$

例 16 求下列函数的黑塞矩阵，依例 15 求该函数的极值点.

(1) $f(\boldsymbol{x})=x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2+x_3^2-x_2x_3+x_1+3x_2-x_3$;

(2) $f(\boldsymbol{x})=-x_1^2+4x_1x_2-2x_2^2+4x_3^2-6x_2x_3+6x_1x_3$.

解 先写成 $f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}+c$ 形式，再求出稳定点，然后讨论 $\boldsymbol{A}$，确定其是否极值点.

(1) $f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_0 = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} &= -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \left(-\frac{17}{6}, -\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

因为 $|2|=2>0,\ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=4>0,\ \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}=6>0$，

所以 $\boldsymbol{A}$ 正定，$\boldsymbol{x}_0=(-17/6,-7/3,-2/3)^{\mathrm{T}}$ 是极小值点.

(2) $f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 4 & 6\\ 4 & -4 & -6\\ 6 & -6 & 8\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

显然 $$\boldsymbol{x}_0=(0,0,0)^{\mathrm{T}}.$$

因为 $$|-2|=-2<0,\quad \begin{vmatrix}-2 & 4\\ 4 & -4\end{vmatrix}=-8<0,$$

$$\begin{vmatrix}-2 & 4 & 6\\ 4 & -4 & -6\\ 6 & -6 & 8\end{vmatrix}=-136<0,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 负定，$\boldsymbol{x}_0$ 是极小值点.

第三节　隐函数定理与反函数定理

主要内容

1. 设 $X\subset\mathbf{R}^n,Y\subset\mathbf{R}^m,\Omega=X\times Y\subset\mathbf{R}^{n+m},\boldsymbol{F}:\Omega\to\mathbf{R}^m$ 对向量函数方程 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\mathbf{0},\boldsymbol{x}\in X,\boldsymbol{y}\in Y$，如果存在向量函数 $\boldsymbol{f}:U\to Y(U\subset X)$，使得 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\equiv\mathbf{0},\boldsymbol{x}\in U$，则称函数 $\boldsymbol{f}$ 是由 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\mathbf{0}$ 所确定的 U 上的隐函数.

$\boldsymbol{F}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 的偏导数记作 $\boldsymbol{F}_x'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，为 $m\times n$ 矩阵；关于 $\boldsymbol{y}$ 的偏导数记作 $\boldsymbol{F}_y'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，为 $m\times m$ 矩阵.

2. 隐函数定理　设 $X\subset\mathbf{R}^n,Y\subset\mathbf{R}^m$ 都是开集，$\Omega=X\times Y\subset\mathbf{R}^{m+n}$（开集），$\boldsymbol{F}:\Omega\to\mathbf{R}^m$. 如果 $\boldsymbol{F}$ 满足以下条件：

- $\exists\ \boldsymbol{x}_0\in X,\boldsymbol{y}_0\in Y$，使得 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=\mathbf{0}$，
- $\boldsymbol{F}$ 在 Ω 上可微，且 $\boldsymbol{F}'$ 连续，
- $\det\boldsymbol{F}_y'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\neq0$，

则存在点 $\boldsymbol{x}_0$ 的 n 维邻域 $U=U(\boldsymbol{x}_0)\subset X$ 和点 $\boldsymbol{y}_0$ 的 m 维邻域 $V=U(\boldsymbol{y}_0)\subset Y$，使得在点 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 的 $n+m$ 维邻域 $W=U\times V\subset\Omega$ 内，由

$F(x,y)=0$ 惟一确定隐函数 $f:U\to V$，满足

- $y_0=f(x_0)$；
- 当 $x\subset U$ 时，$(x,f(x))\in W$，且有 $F(x,f(x))\equiv 0$；
- f 在 U 内存在连续导数，且

$$f'(x)=-[F_y'(x,y)]^{-1}F_x'(x,y),\ (x,y)\in W.$$

3. 若在开集 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上定义了向量函数 $f:D\to\mathbf{R}^n$，如果 f 是一一对应的映射，则 $f(x)=y$ 能确定一个定义在 $f(D)$ 上的函数 $f^{-1}:f(D)\to D$，称为函数 f 的反函数. f 与 f^{-1} 有以下关系：

$$(f^{-1}\circ f)(x)=x,\ x\in D;\quad (f\circ f^{-1})(y)=y,\ y\in f(D).$$

4. 反函数定理　设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是开集，函数 $f:D\to\mathbf{R}^n$ 满足以下条件：

- f 在 D 上可微，且 f' 连续，
- 存在 $x_0\in D$，使得 $\det f'(x_0)\neq 0$，

则存在邻域 $U=U(x_0)\subset D$，使得

- f 在 U 是一一对应的映射，存在 $f^{-1}:V\to U$，其中 $V=f(U)$；
- f^{-1} 在 V 存在连续导数 $(f^{-1})'$，且

$$(f^{-1})'(y)=[f'(x)]^{-1},\ x=f^{-1}(y),\ y\in V.$$

推论　若 f 在 D 上处处满足反函数定理条件，则 $f(D)$ 是一开集.

方法、技巧与典型例题分析

求向量函数的隐函数，首先是验证向量函数是否满足隐函数定理条件，然后利用定理中的公式计算隐函数确定函数的导数.

例 1　设 $\Omega\subset\mathbf{R}^4$，$F,G:\Omega\to\mathbf{R}$. 若向量函数 $H=(F,G)^{\mathrm{T}}$ 在点 $(z_0,w_0)^{\mathrm{T}}\in\Omega$（其中 $z_0=(x_0,y_0)^{\mathrm{T}}$，$w_0=(u_0,v_0)^{\mathrm{T}}$）的邻域内满足隐函数定理条件，且 $\det H_w'(z_0,w_0)\neq 0$，求方程 $H(x,y,u,v)=0$ 在 z_0 某邻域内确定的隐函数 $w=f(z)$ 的导数.

解 $f'(z)=-[H_w'(z,w)]^{-1}H_z'(z,w)$.

即

$$f'(z)=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\frac{\partial G}{\partial v} & -\frac{\partial F}{\partial v}\\ -\frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial u}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} & \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}\\ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} & \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}\end{bmatrix}.$$

例 2 设 $u=u(x,y)$ 由方程组 $\begin{cases}u=f(x,y,z,t),\\ g(y,z,t)=0,\\ h(z,t)=0\end{cases}$ 确定，其中 f,g,h 都是 $C^{(1)}$ 类函数，且 $J=\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\neq 0$，求 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 将方程组写成

$$\begin{cases}F(x,y,z,t,u)\equiv f(x,y,z,t)-u=0,\\ g(y,z,t)=0,\\ h(z,t)=0,\end{cases}$$

则

$$\frac{\partial(F,g,h)}{\partial(z,t,u)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial t} & \frac{\partial F}{\partial u}\\ \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial t} & \frac{\partial g}{\partial u}\\ \frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial h}{\partial t} & \frac{\partial h}{\partial u}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial t} & -1\\ \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial t} & 0\\ \frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial h}{\partial t} & 0\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}=-J\neq 0,$$

故由隐函数定理、方程组确定 z,t,u 是 x,y 隐函数.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial(F,g,h)}{\partial(z,t,y)}}{\dfrac{\partial(F,g,h)}{\partial(z,t,u)}}=\frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_3' & f_4' & f_2' \\ \dfrac{\partial g}{\partial z} & \dfrac{\partial g}{\partial t} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} & \dfrac{\partial h}{\partial t} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{J}\left(-f_3\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t}+f_4\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z}+Jf_2\right).$$

例 3 设由方程组

$$\begin{cases} u+v+w+x+y=a, \\ u^2+v^2+w^2+x^2+y^2=b^2, \\ u^3+v^3+w^3+x^3+y^3=c^3 \end{cases}$$

确定 u,v,w 为 x,y 的隐函数，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial x}$.

解 方程组化为

$$\begin{cases} F(u,v,w,x,y)=u+v+w+x+y-a=0, \\ G(u,v,w,x,y)=u^2+v^2+w^2+x^2+y^2-b^2=0, \\ H(u,v,w,x,y)=u^3+v^3+w^3+x^3+y^3-c^3=0, \end{cases}$$

则在

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2u & 2v & 2w \\ 3u^2 & 3v^2 & 3w^2 \end{vmatrix}$$

$$=6(v-u)(w-v)(w-u)\neq 0$$

时，依隐函数定理确定(u,v,w)为(x,y)的向量函数. 对方程组关于 x 求偏导数，得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial x}+1=0, \\ 2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}+2w\dfrac{\partial w}{\partial x}+2x=0, \\ 3u^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+3v^2\dfrac{\partial v}{\partial x}+3w^2\dfrac{\partial w}{\partial x}+3x^2=0, \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{(v-x)(w-x)}{(v-u)(w-u)},\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{(u-x)(w-x)}{(u-v)(w-v)},\\ \dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{(u-x)(v-x)}{(w-u)(w-v)}.\end{cases}$$

例 4 求下列方程组所确定隐函数的导数：

(1) $\begin{cases}yu+xv=1,\\ xu+yv=0,\end{cases}$ 求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$；

(2) $\begin{cases}u+v+w=x,\\ uv+vw+wu=y,\\ uvw=z,\end{cases}$ 求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

解 (1) 方程组关于 x 求偏导数，得
$$\begin{cases}y\dfrac{\partial u}{\partial x}+v+x\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{yv-xu}{x^2-y^2}.$$

方程组关于 y 求偏导数，得
$$\begin{cases}u+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+x\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\ x\dfrac{\partial u}{\partial y}+v+y\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{yv-xu}{x^2-y^2}.$$

(2) 方程组每个方程关于 x 求偏导数，得
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial x}=1,\\ v\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial x}+w\dfrac{\partial v}{\partial x}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+w\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\\ vw\dfrac{\partial u}{\partial x}+uw\dfrac{\partial v}{\partial x}+uv\dfrac{\partial w}{\partial x}=0,\end{cases}$$

用克拉默法则解方程组，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & u+w & v+u\\ 0 & uw & uv\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ v+w & u+w & v+u\\ vw & uw & uv\end{vmatrix}}=\frac{u^2}{(u-v)(u-w)}.$$

类似可得 $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{u}{(u-v)(w-u)},\quad \dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{1}{(u-v)(u-w)}.$

例 5 设在直角坐标系下,函数 $z=z(x,y)$ 有二阶连续偏导数,并满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

作变量代换 $u=x+y, v=x-y$,因变量也换作 $w=xy-z$,试导出 w 关于 u,v 的偏导数所满足的方程.

解 由变量代换得 $x=\dfrac{u+v}{2}, y=\dfrac{u-v}{2}$,故确定 w 也是 u,v 的函数. 对 $z=xy-w$ 关于 x 和 y 求一阶和二阶偏导数,得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=y-\left(\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)=y-\dfrac{\partial w}{\partial u}-\dfrac{\partial w}{\partial v},\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y}=x-\left(\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=x-\dfrac{\partial w}{\partial u}+\dfrac{\partial w}{\partial v},\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial v^2},\\[2ex] \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1-\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2},\\[2ex] \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2},\end{cases}$$

将上述结果代入题给方程即得 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\dfrac{1}{2}$.

例 6 设 $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{x}_0=(3,2,7)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{y}_0=(0,1)^{\mathrm{T}}$,

$$f_1(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2)=2\mathrm{e}^{y_1}+x_1y_2-4x_2+3,$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2)=y_2\cos y_1-6y_1+2x_1-x_3.$$

求由向量方程 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}$ 确定隐函数 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 的导数.

解 对 $\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$关于 x_1 求偏导数，得

$$\begin{cases}2e^{y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}+y_2+x_1\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}=0,\\ -y_2\sin y_1\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}+\cos y_1\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}-6\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}+2=0,\end{cases}$$

解得

$$\left.\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}\end{bmatrix}\right|_{(x_0,y_0)}=\frac{\left.\begin{bmatrix}2x_1-y_2\cos y_1\\ -y_2(\sin y_1+6)-4e^{y_1}\end{bmatrix}\right|_{(x_0,y_0)}}{\begin{vmatrix}2e^{y_1} & x_1\\ -(y_2\sin y_1+6) & \cos y_1\end{vmatrix}}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{4}\\ -\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

类似可得

$$\left.\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}\right|_{(x_0,y_0)}=\frac{\left.\begin{bmatrix}4\cos y_1\\ 4(y_2\sin y_1+6)\end{bmatrix}\right|_{(x_0,y_0)}}{\begin{vmatrix}2e^{y_1} & x_1\\ -(y_2\sin y_1+6) & \cos y_1\end{vmatrix}}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{5}\\ \dfrac{6}{5}\end{bmatrix},$$

$$\left.\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3}\end{bmatrix}\right|_{(x_0,y_0)}=\frac{\left.\begin{bmatrix}-x_1\\ 2e^{y_1}\end{bmatrix}\right|_{(x_0,y_0)}}{\begin{vmatrix}2e^{y_1} & x_1\\ -(y_2\sin y_1+6) & \cos y_1\end{vmatrix}}=\begin{bmatrix}-\dfrac{3}{20}\\ \dfrac{1}{10}\end{bmatrix}.$$

例 7 设 $\boldsymbol{w}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}=(r,\theta,\varphi)^{\mathrm{T}}$，求函数

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})=(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$$

的反函数的导数.

解 依反函数定理知反函数存在，由公式

$$(\boldsymbol{f}^{-1})'(\boldsymbol{w})=[\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{p})]^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{bmatrix} r^2\sin^2\theta\cos\varphi & r^2\sin\theta\sin\varphi & \frac{r^2}{2}\sin 2\theta \\ \frac{r}{2}\sin 2\theta\cos\varphi & \frac{r}{2}\sin 2\theta\cos\varphi & -r\sin^2\theta \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} & \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & -\frac{\sin\theta}{r} \\ -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} & \frac{\cos\theta}{r\sin\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (r^2\sin\theta \neq 0).$$

例 8 设 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$ 在点 (u,v) 的邻域内有连续偏导数，且 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$.

(1) 证明：方程组 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$ 在点 (x,y) 某邻域内惟一确定反函数组 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$；

(2) 求 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 关于 x,y 的偏导数；

(3) 证明：$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1$.

解 (1) 将方程组写成

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = x - x(u,v) = 0, \\ G(x,y,u,v) = y - y(u,v) = 0, \end{cases}$$

由 $J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$，依反函数存在定理知，存在惟一的反函数组 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$.

(2) 对下列恒等式两边对 x 求偏导数，即

$$\begin{cases} x = x[u(x,y),v(x,y)], \\ y = y[u(x,y),v(x,y)], \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$$

解得
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

类似可得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial x}{\partial v}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial x}{\partial u}$.

(3) 利用向量值函数的复合函数求导的矩阵形式,取 $n=2$,有

$$\frac{\partial(w_1,w_2)}{\partial(x_1,x_2)}=\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u_1,u_2)}\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x_1,x_2)}$$

由于 $u_i=g_i(x_1,x_2)$ $(i=1,2)$,从而得

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)}=1.$$

第十三章　重　积　分

第一节　二重积分的概念

主要内容

1. 设 f 为定义在矩形域 $D=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ 上的函数，J 是一个确定的数. 若 $\forall\ \varepsilon>0$，总 $\exists\ \delta>0$，使得对 D 上任何分割 T，只要 $\|T\|<\delta$，对属于分割 T 的所有积分和，都有

$$\left|\sum_{i,j} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i\Delta y_j - J\right| < \varepsilon,$$

则称 f 在 D 上可积，数 J 称为 f 在 D 上的二重积分，记作

$$J = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad 或 \quad \int_D f.$$

2. 设 f 为矩边域 D 上的有界函数，$T=\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\}$ 为 D 上一个矩形网分割，记 $M_i=\sup\limits_{\sigma_i}\{f(x,y)\}$，$m_i=\inf\limits_{\sigma_i}\{f(x,y)\}$，分别称

$$S(T) = \sum_i M_i\Delta\sigma_i \quad 和 \quad s(T) = \sum_i m_i\Delta\sigma_i$$

为 f 关于分割 T 的上和与下和. 具有性质：

(1) $\forall\ T$，总有 $s(T)\leqslant\sum\limits_i(T)\leqslant S(T)$；

(2) $\forall\ T,T'$，都有 $s(T)\leqslant S(T')$；

(3) 对 T 加密后的分割 T'，有 $s(T)\leqslant s(T')$，$S(T)\geqslant S(T')$；

(4) 分别称 $s=\sup\limits_{T}\{s(T)\}$ 和 $S=\inf\limits_{T}\{S(T)\}$ 为 f 在 D 上的下

积分与上积分，有 $s \leqslant S$，$\lim\limits_{\|T\| \to 0} S(T) = S$，$\lim\limits_{\|T\| \to 0} s(T) = s$.

3. 有界函数 f 在矩形域 D 上可积 $\Leftrightarrow f$ 在 D 上的上积分等于下积分，且 $s = S = \int_D f$.

4. 有界函数 f 在矩形域 D 上可积 $\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists$ 某 $T \in D$，使得 $S(T) - s(T) = \sum\limits_i \omega_i \Delta\sigma_i < \varepsilon$.

$\omega_i = M_i - m_i$ 称为 f 在 σ_i 上的振幅.

5. 若 f 在矩形域 D 上连续，则 f 在 D 上可积.

6. 设 $\varphi: [c,d] \to \mathbf{R}$ 为可积函数，$E = \{(x,y) \mid y = \varphi(x), x \in [c,d]\} \subset D = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$ $([c,d] \subset [a_1,b_1])$. 若 f 为 D 上有界函数，且在 $D \backslash E$ 上连续，则 f 在 D 上可积.

7. 设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 为有界闭域，f 在 D 上有界函数，矩形域 $\hat{D} \subset D$，则称

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in \hat{D} \backslash D \end{cases}$$

为 f 在 $\hat{D}$ 上的延拓函数.

8. 若 f 在延拓函数 $\hat{f}$ 在 $\hat{D}$ 上可积，则 f 在 D 上可积，且

$$\int_D f = \int_{\hat{D}} \hat{f}.$$

9. 设 D 是平面有界点集（平面图形），函数 $f(x,y)$ 在 D 上可积，则称 D 是可求面积的，且 D 的面积 $\Delta D = \int_D 1$.

10. 二重积分有与定积分类似的七条性质.

疑难解析

1. 二重积分与定积分有哪些异同？

答 二重积分与定积分都是以积分和式的极限来定义的，要求区域（区间）是有界的，函数 f 在区域上有界. 它们有相同的积

分性质.

不同的是,定积分中积分区域是数轴上的区间,被积函数是一元函数;二重积分中积分区域是平面区域,被积函数是二元函数.

2. 若 f 在 D 内除有限条面积为零的曲线外连续,f 是否在 D 上可积?

答 f 在 D 上可积. 利用积分的区域可加性,将 D 分割为有限个小区域. 因为这些曲线面积为零,不影响小区域上的积分值,所以 $\int_D f = \sum_{i=1}^{k}\int_{D_i} f$,且 f 在 D 上可积.

方法、技巧与典型例题分析

理解二重积分作为积分和的极限并认识 σ_i 的意义,掌握在二重积分存在的条件下,利用对区域的特殊分法和点的特殊取法来计算积分值,是我们全面理解二重积分概念的必要条件,希望读者通过例题切实掌握.

例 1 证明:若函数 $f(x,y)$ 在有界的区域 D 上连续,且 $f(x,y)>0$,则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$.

证 由题设条件知,$0<m\leqslant f(x,y)\leqslant M$,所以,$f(x,y)$ 在 D 上的积分和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} m\Delta\sigma_i = m\sum_{i=1}^{m}\Delta\sigma_i = mD_S,$$

其中 D_S 是 D 的面积. 而 $D_S>0$,故

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \geqslant mD_S > 0.$$

例 2 证明:若函数 f 在矩形域 D 上可积,则 f 在 D 上有界.

证 由定义,若 $f(x,y)$ 在矩形域上可积,则 $\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \sigma>0$,$\forall\ T\in D$,当 $\|T\|<\delta$ 时,有

$$\left|\sum_{i,j} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i \Delta y_i - J\right| < \varepsilon,$$

所以 $$|f(x,y)| \leqslant M.$$

若 $f(x,y)$ 无界，则对 $T=\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\}$，至少在某 σ_i 上，有

$$f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i \Delta y_j = f(\xi_i,\eta_j)\Delta\sigma_i \to \infty.$$

从而 $$\left|\sum_{i,j} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i \Delta y_i - J\right| \to \infty,$$

引出矛盾.

例 3 把积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 当做积分和的极限，用直线网 $x=i/n, y=j/n\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 分割 $D: 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$，并取被积函数在小正方形之右上顶点的值为 $f(\xi_i,\eta_j)$，计算积分值.

解 此时，积分和式为

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot = \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j$$

$$= \frac{1}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4},$$

所以 $$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i \Delta y_j = \frac{1}{4}.$$

例 4 用直线 $x=1+i/n, y=1+2j/n\ (i,j=0,1,\cdots,n)$ 将域 $1\leqslant x\leqslant 2, 1\leqslant y\leqslant 3$ 分为小矩形. 作出函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在域上的积分上和 S 与积分下和 s，当 $n\to\infty$ 时，求上和与下和的极限.

解 求上和时，取 $f(\xi_i,\eta_j)$ 为小矩形右上顶点的值；求下和时，取 $f(\xi_i,\eta_j)$ 为小矩形左下顶点的值. 故

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2 + \left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\frac{1}{n}\,\frac{2}{n} = \frac{40}{3} + \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2},$$

$$s = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2 + \left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\frac{1}{n}\,\frac{2}{n} = \frac{40}{3} - \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}.$$

当 $n\to\infty$ 时， $$\lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty} s = \frac{40}{3} = 13\,\frac{1}{3}.$$

例 5 设 $f(x,y)$ 为连续函数，证明：

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(0,0).$$

证 由二重积分中值定理,有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi r^2\cdot f(\xi,\eta).$$

因为(ξ,η)是域 $x^2+y^2\leqslant r^2$ 内一点,当 $r\to 0$ 时,$f(\xi,\eta)\to f(0,0)$. 由连续性,得

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{r\to 0}f(\xi,\eta) = f(0,0).$$

一般地,若 $f(x,y)$ 在方形域 D 可积,在(x_0,y_0)连续,对$(x_0,y_0)\in G\subset D$,有

$$\lim_{d(G)\to 0}\frac{1}{\overline{G}}\iint\limits_{G} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(x_0,y_0).$$

其中 $d(G)$为 G 的直径,$\overline{G}$ 为 G 的面积.

例 6 证明:若函数 $f(x,y)$,$g(x,y)$在有界闭区域 D 上连续,且 $g(x,y)\geqslant 0$,则$\exists\ (\xi,\eta)\in D$,使得

$$\iint\limits_{D} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\iint\limits_{D} g(x,g)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证 由 $f(x,y)$ 在 D 上连续,必有 $m\leqslant f(x,y)\leqslant M$,故 $\forall\ (x,y)\in D$,有

$$mg(x,y)\leqslant f(x,y)g(x,y)\leqslant Mg(x,y),$$

从而,有

$$m\iint\limits_{D} g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_{D} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant M\iint\limits_{D} g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为 $g(x,y)\geqslant 0$,设 $\iint\limits_{D} g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$,则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\iint\limits_{D} g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

若 $\iint\limits_{D} g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$, 则

$$m \leqslant \frac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \leqslant M.$$

由连续函数的介值定理,$\exists\ (\xi,\eta)\in D$,使得

$$\frac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = f(\xi,\eta),$$

从而 $$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例 7 若函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续,且对任何 $D'\subset D$,都有 $\iint\limits_{D'} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$,证明:$\forall\ (x,y)\in D, f(x,y)=0$.

证 用反证法. 设在某 $P_0(x_0,y_0)\in D, f(x_0,y_0)\neq 0$,不妨设 $f(x_0,y_0)>0$,则依连续函数的局部保号性,存在 $U(P_0;r)$,使得 $\forall\ (x,y)\in U(P_0;r)\cap D$,有 $f(x,y)>\frac{f(x_0,y_0)}{2}>0$,于是

$$\iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \frac{f(x_0,y_0)}{2}\iint\limits_G \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{f(x_0,y_0)}{2}D_G > 0,$$

其中 $G=U(P_0;r)$,D_G 是 G 的面积. 上式与题设矛盾,故 $\forall\ (x,y)\in D$,必有 $f(x,y)=0$.

例 8 函数 $$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\text{为有理点},\\ -1, & (x,y)\text{为无理点}\end{cases}$$
在 $D[0,1;0,1]$上是否可积?

解 不可积. 因为对区域的任一分割,若在每一小区域 $\Delta\sigma_i$ 上总取有理点(ξ_i,η_i),则

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i = D_S = 1.$$

若在每一小区域 $\Delta\sigma_i$ 上总取无理点(ξ_i,η_i),则

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = -\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i = -D_S = -1.$$

从而知 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 不存在.

例 9 估计 $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\dfrac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值.

解 因为 $0\leqslant\cos^2 x\leqslant 1, 0\leqslant\cos^2 y\leqslant 1, D_S=200$，故

$$\frac{1}{102}\leqslant f(x,y)=\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\leqslant\frac{1}{100}.$$

于是 $$\frac{100}{51}\leqslant\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\leqslant 2.$$

例 10 计算 $\lim\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{2n}\dfrac{2}{n^2}\left[\dfrac{2i+j}{n}\right]$，这里 $[x]$ 是不超过 x 的最大整数.

解 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{2n}\dfrac{2}{n^2}\left[\dfrac{2i+j}{n}\right]$ 是函数 $f(x,y)=[x,y]$ 在方形域 $D=[0,2;0,2]$ 上的一个积分和. 将 x 轴上区间 n 等分，y 轴上区间 $2n$ 等分，故 $\Delta\sigma_i=\dfrac{2}{n^2}$；取小区间 $\Delta\sigma_i$ 右上顶点 $\left(\dfrac{2i}{n},\dfrac{j}{n}\right)$ 的函数值，即构造出下列和式. 函数 $f(x,y)=[x+y]$.

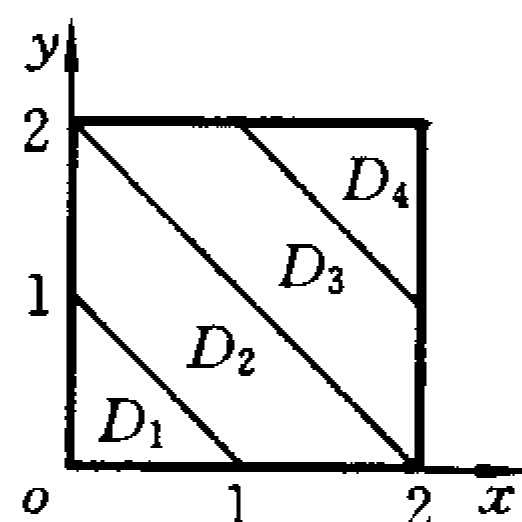


图 13.1

将 D 分为 D_1,D_2,D_3,D_4，其面积分别为 $1/2,3/2,3/2,1/2$，各小区域内函数值分别为 $0,1,2,3$. 于是

$$\begin{aligned}
&\lim\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2n}\frac{2}{n^2}\left[\frac{2i+j}{n}\right]\\
&=\iint\limits_{D_1}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_3}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_4}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=0+\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint\limits_{D_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+3\iint\limits_{D_4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=1\cdot\frac{3}{2}+2\cdot\frac{3}{2}+3\cdot\frac{1}{2}=6.
\end{aligned}$$

第二节　二重积分的计算

主要内容

1. 设 f 定义在矩形域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上，当 x 取 $[a,b]$ 上某定值时，$f(x,y)$ 是 $[c,d]$ 上的一元函数，则积分(若存在)

$$I(x)=\int_c^b f(x,y)\mathrm{d}y,\ x\in[a,b]$$

是定义在 $[a,b]$ 上的函数，称为含参变量 x 的积分.

2. 若 f 在矩形域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则函数 $I(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上连续.

3. 设 f 在矩形域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积，若 $\forall x\in[a,b]$，$f(x,y)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则含参变量积分 $I(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b I(x)\mathrm{d}x=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.$$

4. 若 f 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x,$$

即累次积分与顺序无关.

5. 平面点集 $D=\{(x,y)\mid y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为 x-型区域，$D=\{(x,y)\mid x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y),c\leqslant y\leqslant d\}$ 称为 y-型区域.

6. 设 f 在 x-型区域上连续，$y_1(x)$，$y_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$G(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上连续，且

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

7. 用极坐标变换 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$ 时，有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}r(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r,$$

其中 $D'=\{(r,\theta)\mid r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta),\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2\}$，

或 $\iint_{D'}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_{r_1}^{r_2}r\mathrm{d}r\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}\theta,$

其中 $D'=\{(r,\theta)\mid r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta),r_1\leqslant r\leqslant r_2\}.$

8. 对一般的变量代换 $u=u(x,y),v=v(x,y)$，若 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0$，则有逆变换 $x=x(u,v),y=y(u,v)$，且有 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$. 那么有换元公式

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}f(x(u,v),$$

$$y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中 D' 为 D 变换后对应的区域.

9. 设函数 f 及 f_x 都在矩形域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则 $I(x)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上可微，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y.$$

10. 设函数 f 及 f_x 都在矩形域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，y_1,y_2 为定义在$[a,b]$上，其值域含于$[c,d]$的两个可微函数，则函数 $F(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上可微，且

$$F'(x)=\int_{y_2(x)}^{y_1(x)} f_x'(x,y)\mathrm{d}y + f(x,y_2(x))y_2'(x) - f(x,y_1(x))y_1'(x).$$

疑难解析

1. 用累次积分来计算二重积分应注意什么问题？怎样解决这些问题？

答 解题的关键是画出积分区域的草图，确定是 x-型区域还是 y-型区域.

(1) 若积分区域既是 x-型区域又是 y-型区域，则两种积分顺序都可以. 但一般选择里层积分限简单的或积分区域分块少的一种，以减少计算工作量.

(2) 被积函数含有绝对值符号、最值符号或"[]"符号时，要将积分区域适当分块，以去掉这些符号，直接进行累次积分.

(3) 被积函数是分片函数时，要分片求解.

(4) 有些累次积分要化为重积分来求解.

(5) 若被积函数是抽象函数，要依函数的特点来处理积分.

2. 怎样选择是用直角坐标系还是用极坐标系计算二重积分？

答 主要从被积函数与积分区域来考虑.

(1) 当积分区域为圆域、环形域、扇形域及极坐标曲线包围区域时，可选择极坐标系.

当积分区域为多边形或直线与一般曲线围成图形时，可选择直角坐标系.

有些图形分块后可能要用不同的坐标系.

(2) 当被积函数形如 $f(x^2+y^2)$ 或 $f(y/x)$ 时，可选择极坐标系.

(3) 当积分区域为椭圆或被积函数形如 $f\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$ 时，可选

择广义极坐标系，$x=ra\cos\theta, y=rb\sin\theta$. 此时，$|J|=rab$.

方法、技巧与典型例题分析

除疑难解析中所讲的问题外，我们还知道累次积分可看做两次定积分，因此，定积分中的方法和技巧在二重积分中仍可使用. 但是被积函数的奇偶性与积分区域的对称性表现得可能比定积分复杂些. 读者应很好地加以辨析，应用得当可以简化积分计算.

一、二重积分的计算

例 1 计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D x^2 y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 由 $x=0, y=1$ 与 $x=\sqrt{y}$ 所围成；

(2) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 由 $xy=1, y=x$ 与 $x=2$ 所围成；

(3) $\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 由 $|x|+|y|=1$ 所围成；

(4) $\iint\limits_D x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 由 $x=0, y=x$ 与 $y=1$ 所围成.

解 先画草图，用不等式组确定区域(包括确定积分顺序)；然后配置积分限，逐层积分.

(1) 如图 13.2 所示，D 表示为：$x^2\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant x\leqslant 1$，故

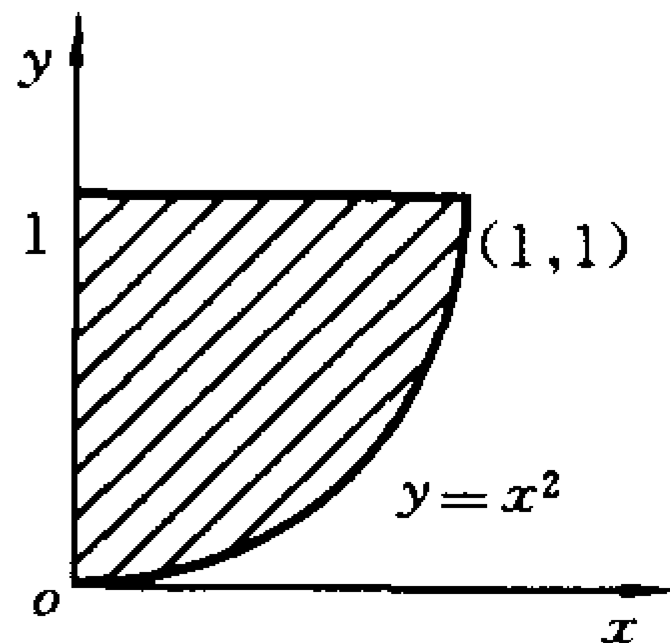


图 13.2

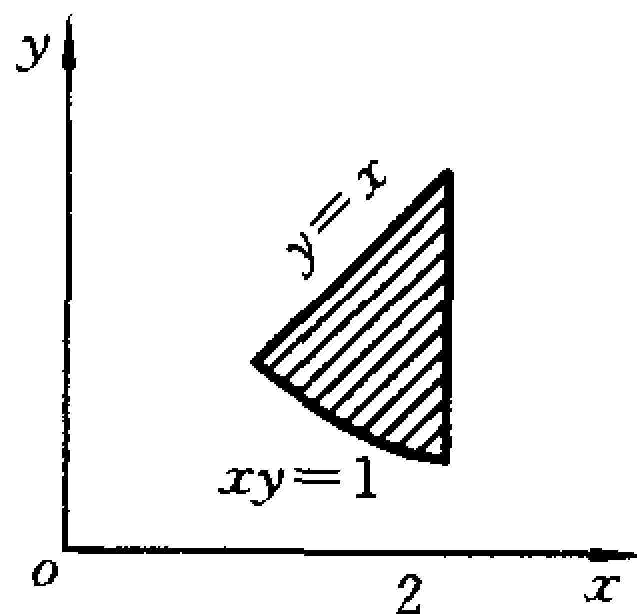


图 13.3

$$I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 x^2 y dy=\int_0^1 x^2\,\frac{1-x^4}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7}x^7\right)\Big|_0^1=\frac{2}{21}.$$

（2）如图 13.3 所示，D 表示为：$1/x\leqslant y\leqslant x,1\leqslant x\leqslant 2$，故

$$I=\int_1^2 dx\int_{1/x}^x\frac{dy}{x^2y^2}=\int_1^2 x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=\frac{9}{4}.$$

（3）如图 13.4 所示，D_1 表示为：$0\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1-x$；$D_2$ 表示为：$-1\leqslant x\leqslant 0,-1-x\leqslant y\leqslant 1+x$. 故

$$I=\iint_{D_1}(x+y)^2 dxdy+\iint_{D_2}(x+y)^2 dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_{x-1}^{1-x}(x+y)^2 dx+\int_{-1}^0 dx\int_{-1-x}^{1+x}(x+y)^2 dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1[1-(2x-1)^3]dx+\frac{1}{3}\int_{-1}^0[(2x+1)^3+1]dx$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

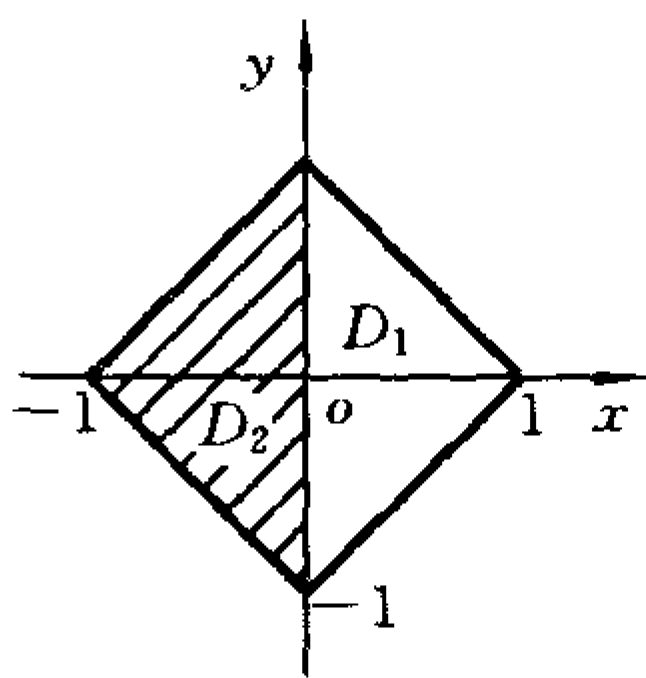


图 13.4

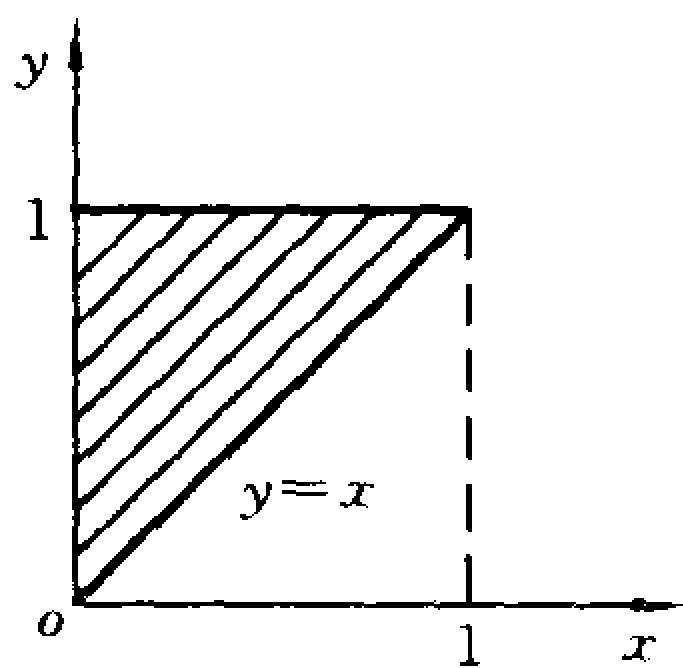


图 13.5

（4）如图 13.5 所示，D 表示为：$0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant y$，故

$$I=\int_0^1 e^{-y^2}dy\int_0^y x^2 dx=\int_0^1\frac{y^3}{3}e^{-y^2}dy$$

$$=-\frac{1}{6}\left(y^2e^{-y^2}-2\int_0^1 ye^{-y^2}dy\right)=\frac{1}{6}\left(1-\frac{2}{e}\right).$$

本题若先对 y 积分，则 $\int e^{-y^2}dy$ 不能用有限形式积出. 积分中还使

用了分部积分法.

例 2 改变下列积分中累次积分的顺序:

(1) $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{2x} f(x,y)\mathrm{d}y$; (2) $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{x^2}^1 f(x,y)\mathrm{d}y$;

(3) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{(3-x)/2} f(x,y)\mathrm{d}y$;

(4) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^4 \mathrm{d}x \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

解 先依据原积分限画出积分区域的草图,然后按新次序写出区域的不等式组表示(包括区域分块),配置积分限.

(1) 如图 13.6 所示,积分区域分为 D_1 和 D_2,D_1 表示为:$0 \leqslant y \leqslant 2, y/2 \leqslant x \leqslant y$;$D_2$ 表示为:$2 \leqslant y \leqslant 4, y/2 \leqslant x \leqslant 2$. 故

$$I = \int_0^2 \mathrm{d}y \int_{y/2}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_2^4 \mathrm{d}y \int_{y/2}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

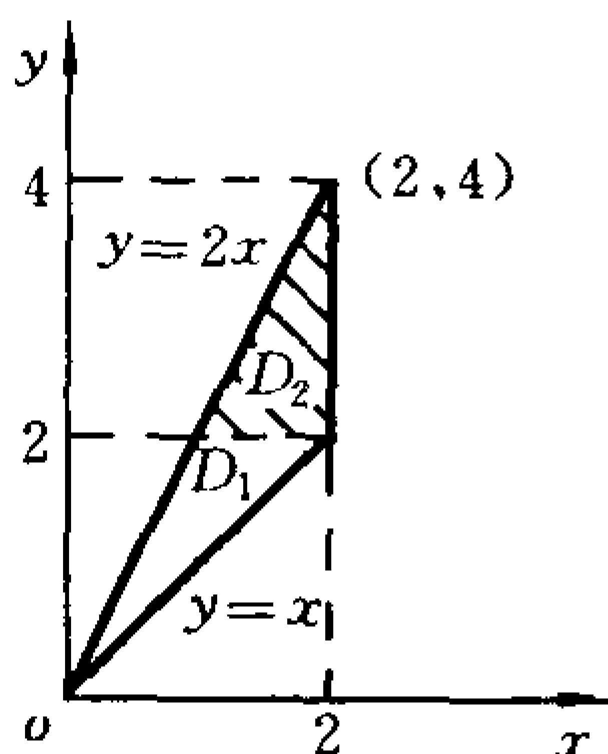


图 13.6

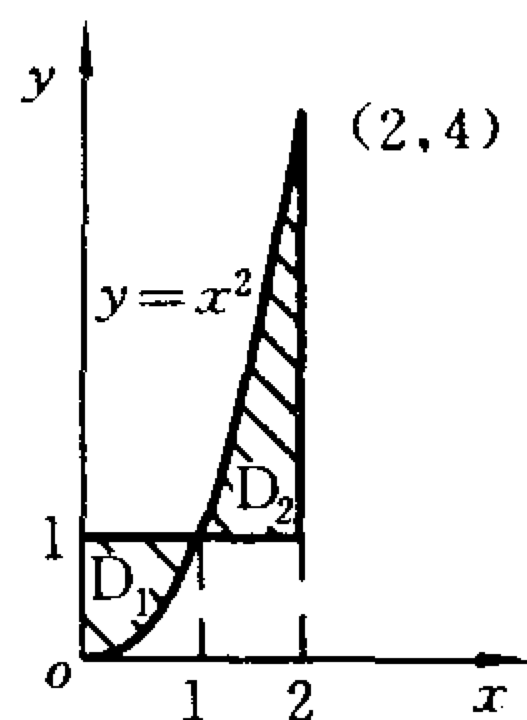


图 13.7

(2) 如图 13.7 所示,积分区域分为 D_1 和 D_2,D_1 表示为:$0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{y}$;$D_2$ 表示为:$1 \leqslant y \leqslant 4, \sqrt{y} \leqslant x \leqslant 2$. 故

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{1} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_1^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_1^4 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{y}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(3) 如图 13.8 所示,D 表示为:$0 \leqslant y \leqslant 1, \sqrt{y} \leqslant x \leqslant 3-2y$,故

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

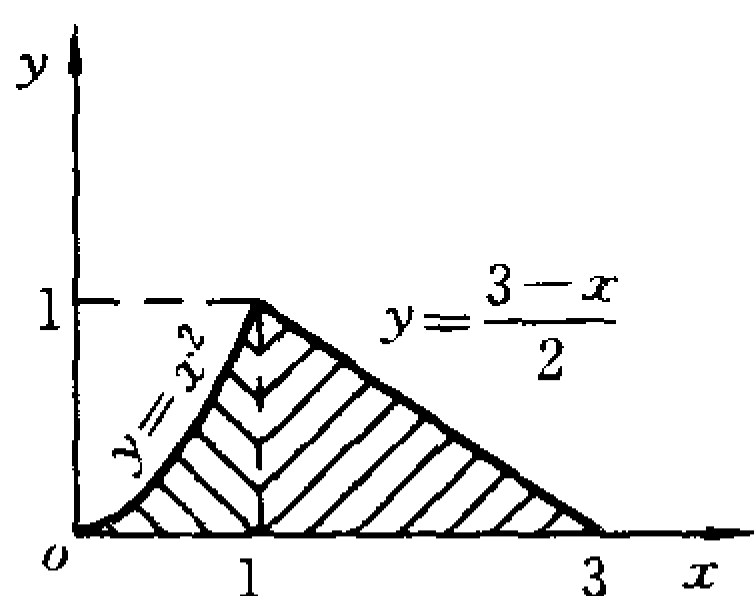


图 13.8

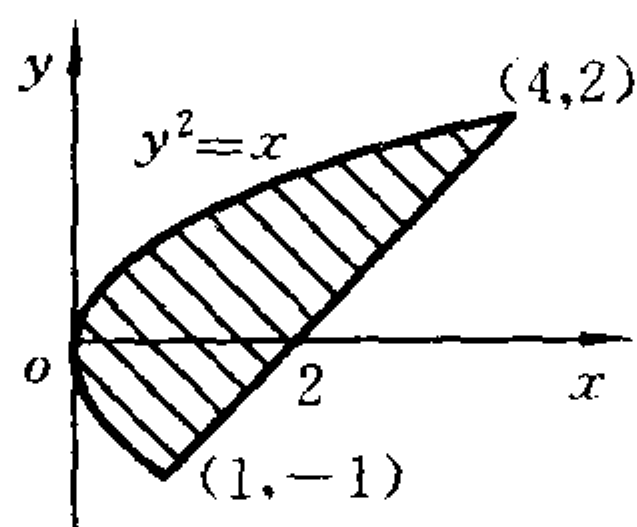


图 13.9

（4）如图 13.9 所示，D 表示为：$-1\leqslant y\leqslant 2, y^2\leqslant x\leqslant y+2$，故

$$I=\int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

例 3 计算下列积分：

（1）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$；

（2）$\iint\limits_D\sin x\sin y\cdot\max(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D:0\leqslant x,y\leqslant\pi$；

（3）$\iint\limits_D|xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D:x^2+y^2\leqslant a^2$.

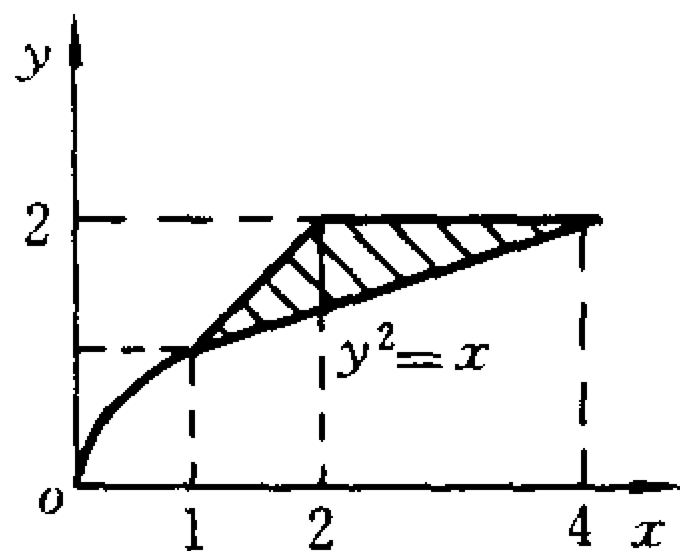


图 13.10

解 （1）D 如图 13.10 所示，显然先对 y 求积较困难，需改变积分次序. 因此

$$I=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x=-\frac{2}{\pi}\int_1^2y\cos\frac{\pi y}{2}\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{4}{\pi^2}\left(y\sin\frac{\pi y}{2}-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi y}{2}\right)\Bigg|_1^2$$

$$=4(2+\pi)/\pi^3.$$

（2）被积函数含 $\max(x,y)$，需利用直线 $y=x$ 将 D 分为 D_1 和 D_2. D_1 表示为：$0\leqslant x\leqslant\pi, x\leqslant y\leqslant\pi$；$D_2$ 表示为：$0\leqslant x\leqslant\pi, 0\leqslant y\leqslant x$. 故

$$I=\int_0^\pi\mathrm{d}x\int_x^\pi\sin x\sin y\cdot y\mathrm{d}y+\int_0^\pi\mathrm{d}x\int_0^x\sin x\sin y\cdot x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^\pi\sin x(-\cos y\cdot y+\sin y)\Big|_x^\pi\mathrm{d}x+\int_0^\pi x\sin x(-\cos y)\Big|_0^x\mathrm{d}x$$

$$= 5\pi/2.$$

(3) 用直线 $x=0$ 与 $y=0$ 将 D 分为四块,得

$$I=\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy dy - \int_0^a dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^0 xy dy$$

$$-\int_{-a}^0 dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy dy + \int_{-a}^0 dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^0 xy dy$$

$$= \frac{a^4}{8}+\frac{a^4}{8}+\frac{a^4}{8}+\frac{a^4}{8}=\frac{a^4}{2}.$$

对含绝对值符号的积分,要根据函数的特点,将区域分块,去掉绝对值符号.

例 4 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D (x^2-2x+3y+2)dxdy$, $D: x^2+y^2\leqslant a^2$;

(2) $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, D 由 $y=x^2, y=4x^2, y=1$ 所围成.

解 考虑积分区域的对称性,化简积分.

(1) 区域 D 关于 x 轴, y 轴与原点对称,故

$$\iint\limits_D -2x dxdy = 0,\quad \iint\limits_D 3y dxdy = 0,\quad \iint\limits_D x^2 dxdy = \iint\limits_D y^2 dxdy,$$

$$I = \iint\limits_D x^2 dxdy + 2\iint\limits_D dxdy.$$

则
$$\iint\limits_D x^2 dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^a r^2\cdot r dr$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{a^4}{4} = \frac{\pi}{4}a^4,$$

$$\iint\limits_D dxdy = \pi a^2.$$

从而
$$I = \pi a^4/4 + 2\pi a^2.$$

(2) 积分区域关于 y 轴对称,故 $\iint\limits_D x dxdy = 0$.

$$I=\iint\limits_{D} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_{0}^{1} y\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}/2}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{0}^{1} y\left(\sqrt{y}-\frac{\sqrt{y}}{2}\right)\mathrm{d}y=2\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{y}}{2}y\mathrm{d}y=\frac{2}{5}.$$

例 5 计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_{D}\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D:x^2+y^2\leqslant a^2$；

(2) $\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D:\sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}$.

解 本例用直角坐标系计算是困难的，要变换为极坐标系来计算，并注意区域的封闭性.

(1) D 表示为：$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant a$，故

$$I=\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{a}\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\cdot r\mathrm{d}r\quad(\text{令 } r^2=t)$$

$$=\pi\int_{0}^{a^2}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\mathrm{d}t=\pi\int_{0}^{a^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}-\pi\int_{0}^{a^2}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

$$=\pi\arcsin t\Big|_{0}^{a^2}+\pi\sqrt{1-t^2}\Big|_{0}^{a^2}$$

$$=\pi(\arcsin a+\sqrt{1-a^2}-1).$$

(2) D 应添加条件 $0\leqslant x\leqslant 2$，则变换后区域可表示为：$2\cos\theta\leqslant r\leqslant 2, 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$，故

$$I=\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{2}r^2\cdot r\mathrm{d}r=4\int_{0}^{\pi/2}(1-\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=4\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{5}{4}\pi\ (\text{瓦里士公式}).$$

例 6 计算 $\iint\limits_{D}(|x-y|+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D:x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$.

解 为了将绝对值符号去掉，用直线 $y=x$ 将 D 分为 $D_1:y\leqslant$

x 和 $D_2: y>x$，再化为极坐标计算. 故

$$I=\iint\limits_{D_1}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2(\cos\theta-\sin\theta)\mathrm{d}r$$

$$+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2(\sin\theta-\cos\theta)\mathrm{d}r+2\iint\limits_{D}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\pi/4}(\cos\theta-\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$+\frac{1}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\sin\theta-\cos\theta)\mathrm{d}\theta+2\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1).$$

例 7 计算

$$\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D: x^2+y^2\leqslant 2(x+y).$$

解 $x^2+y^2\leqslant 2x+2y$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2.$

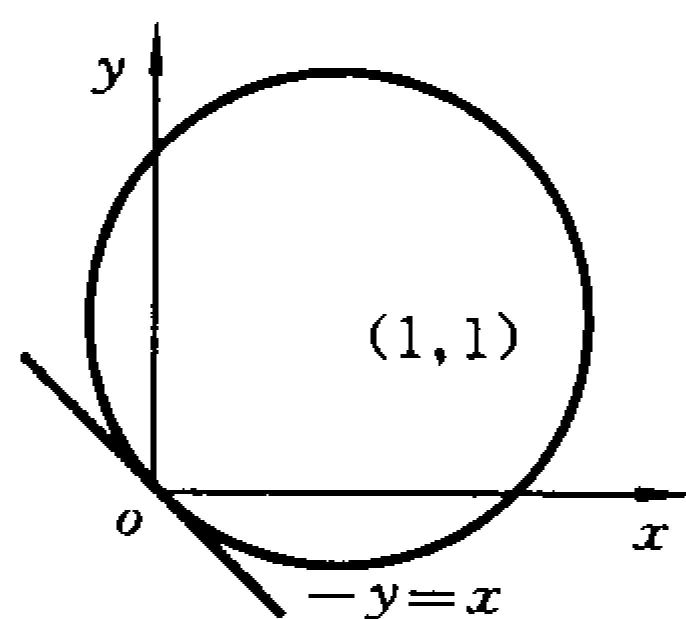


图 13.11

(1) 如图 13.11 所示，D 表示为：$0\leqslant r\leqslant 2(\cos\theta+\sin\theta)$，$-\pi/4\leqslant\theta\leqslant 3\pi/4$.

$$I=\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2(\cos\theta+\sin\theta)}r(\cos\theta+\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}(\cos\theta+\sin\theta)^4\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\left(\frac{3}{2}+2\sin 2\theta-\frac{1}{2}\cos 4\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{8}{3}\left[\frac{3}{2}\theta-\cos 2\theta-\frac{1}{8}\sin 4\theta\right]\Bigg|_{-\pi/2}^{3\pi/2}=4\pi.$$

(2) 作坐标代换 $x=1+r\cos\theta, y=1+r\sin\theta$，则 D 表示为：$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}$，故

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2+r\cos\theta+r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$
$$=\int_0^{2\pi}\left[2+\frac{8}{3}\cos\theta+\frac{8}{3}\sin\theta\right]\mathrm{d}\theta=4\pi.$$

注意　许多题是可以一题多解的，为了节省篇幅，本书每题只给出一种解法.

下面给出一个非连续函数的积分. 求非连续函数的积分，要依连续性划分积分区域，分析其间断线与曲线交点.

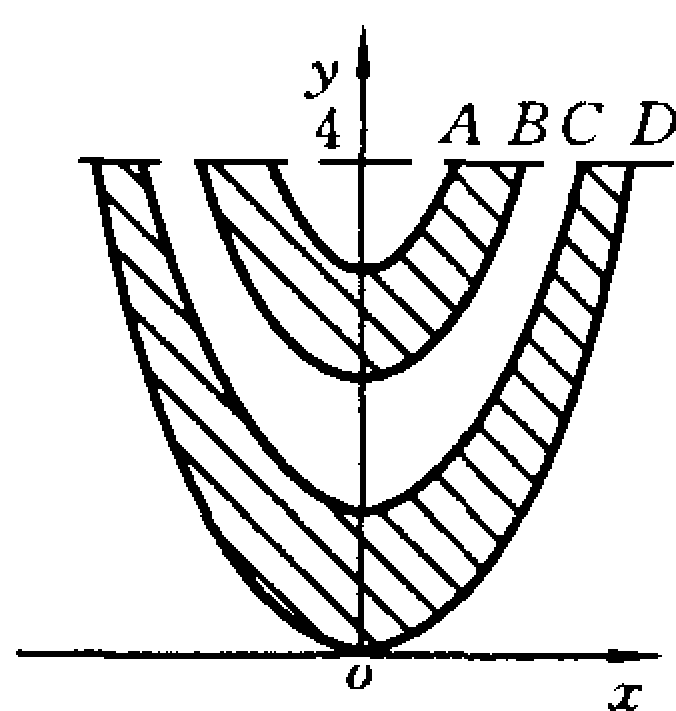


图 13.12

例 8　计算 $\iint\limits_D\sqrt{[y-x^2]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $x^2\leqslant y\leqslant 4$.

解　如图 13.12 所示，按连续性划分积分区域为：

当 $x^2\leqslant y\leqslant x^2+1$ 时，$[y-x^2]=0$；

当 $x^2+1\leqslant y\leqslant x^2+2$ 时，$[y-x^2]=1$；

当 $x^2+2\leqslant y\leqslant x^2+3$ 时，$[y-x^2]=2$；

当 $x^2+3\leqslant y\leqslant x^2+4$ 时，$[y-x^2]=3$.

抛物线与直线 $y=4$ 的交点为 $A(1,4)$, $B(\sqrt{2},4)$, $C(\sqrt{3},4)$, $D(2,4)$，积分区域关于 y 轴对称. 于是

$$I=2\left[\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2+1}^{x^2+2}\mathrm{d}y+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\mathrm{d}x\int_{x^2+1}^{4}\mathrm{d}y\right]$$
$$+2\sqrt{2}\left[\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2+2}^{x^2+3}\mathrm{d}y+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2+2}^{4}\mathrm{d}y\right]$$
$$+2\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2+3}^{4}\mathrm{d}y$$
$$=2\left[\sqrt{2}+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}(3-x^2)\mathrm{d}x\right]$$
$$+2\sqrt{2}\left[1+\int_1^{\sqrt{2}}(2-x^2)\mathrm{d}x\right]+2\sqrt{3}\int_0^1(1-x^2)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{4}{3}(4+4\sqrt{3}-3\sqrt{2}).$$

例 9 计算下列积分：

(1) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y}\sin(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 由 $\frac{\pi y}{2} \leqslant x \leqslant \pi y, x \leqslant y^2 \leqslant 2x, y > 0, x > 0$ 所围成；

(2) $\iint\limits_D \frac{(x+y)\ln(1+x/y)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 由 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围成；

(3) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 由 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围成.

解 本例要依据函数特点，进行适当的变量代换后再计算.

(1) 作代换 $u=\frac{x^2}{y}, v=\frac{y^2}{x}$，则 $J=\frac{1}{3}$，D 化为 $D':\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{x^2}{y}\leqslant\pi, 1\leqslant\frac{y^2}{x}\leqslant 2, x>0, y>0$. 于是

$$I=\iint\limits_{D'} u\sin(uv)\cdot\frac{1}{3}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\int_{\pi/2}^{\pi}\mathrm{d}u\int_1^2 u\sin(uv)\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{3}\int_{\pi/2}^{\pi}[-\cos(uv)]\Big|_1^2\mathrm{d}u=-\frac{1}{3}.$$

(2) 作代换 $x+y=u, \frac{y}{x}=v$，则 $x=\frac{u}{1+v}, y=\frac{uv}{1+v}, |J|=\frac{|u|}{(1+v)^2}$，$D$ 代为 $D':0\leqslant u\leqslant 1, 0\leqslant v\leqslant+\infty$，于是

$$I=\iint\limits_{D'}\frac{u\sin(1+v)}{\sqrt{1-u}}\cdot\frac{|u|}{(1+v)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}v\int_0^1\frac{u^2\ln(1+v)}{(1+v)^2\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+v)}{(1+v)^2}\mathrm{d}v\int_0^1\frac{u^2}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u.$$

其中

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+v)}{(1+v)^2}\mathrm{d}v=\left[-\frac{\ln(1+v)}{1+v}\right]\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}v}{(1+v)^2}$$

$$= 0 - \left[\frac{1}{1+v}\right]\Big|_0^{+\infty} = 1,$$

$$\int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u \xlongequal{1-u=t} -\int_1^0 \frac{(1-t)^2}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \frac{16}{15},$$

故
$$I = 1 \cdot \frac{16}{15} = \frac{16}{15}.$$

(3) 作代换 $u=y-x, v=y+x$，则 $x=\dfrac{v-u}{2}, y=\dfrac{v+u}{2}, |J| = 1/2$，$D$ 化为 D'，D' 由 $v=1, u=v, u=-v$ 所围成.

$$I = \iint\limits_{D'} \mathrm{e}^{u/v} \cdot \frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}v \int_{-v}^{v} \mathrm{e}^{u/v}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1})v\mathrm{d}v = \frac{1}{4}(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}).$$

二、二重积分证明题

二重积分证明题的求证，常利用对积分区域的分块和区域的对称性或对被积函数的变量改变记号、利用被积函数的奇偶性以及改变积分顺序等方法进行. 在证题前，对命题要有深刻的思考.

例 10 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$，证明：

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}A^2.$$

证 用改变积分顺序与改变记号的方法，即

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y \xlongequal{\text{改变顺序}} \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{改变记号}} \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y,$$

故
$$2I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y = \left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2 = A^2,$$

于是
$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}A^2.$$

例 11 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，试用二重积分证明：

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

证 因为

$$0\leqslant \int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b [f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y$$

$$=(b-a)\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y\right]-2\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2,$$

所以

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

当 $f(x)=c$（常数）时等号成立.

例 12 若 $f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，证明：

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

证 因为$[f(x)g(x)-f(y)g(y)]^2\geqslant 0$，所以在方形域 $D:a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant b$ 上，有

$$0\leqslant \iint_D [f(x)g(x)-f(y)g(y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\int_a^b f^2(x)g^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_a^b\int_a^b f^2(y)g^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-2\int_a^b\int_a^b f(x)g(x)f(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_a^b\int_a^b f^2(x)f^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2,$$

故

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y.$$

当 $f(x)=\sqrt{h(x)},g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{h(x)}}$时，由上式得

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{h(x)}\mathrm{d}x\geqslant (b-a)^2\quad (h(x)>0).$$

例 13 证明：$\forall\, n\in\mathbf{N},n>1$，有

$$\int_a^b\int_a^x (x-y)^{n-2}f(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1}f(y)\mathrm{d}y.$$

证 $I = \int_a^b \mathrm{d}y\int_y^b (x-y)^{n-2}f(y)\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{\text{改变顺序}} \int_a^b f(y)\left[\frac{1}{n-1}(x-y)^{n-1}\right]\Big|_y^b \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1}f(y)\mathrm{d}y.$$

例 14 设 $p(x)$是$[a,b]$上的可积函数，而 $f(x)$与 $g(x)$在$[a,b]$上有相同的单调性，证明：

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

证 设 $I = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$

$$- \int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x\ ,$$

则
$$I = \int_a^b p(y)\mathrm{d}y\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$- \int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(y)g(y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_a^b\int_a^b p(x)p(y)f(x)[g(x)-g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad ①$$

类似地，有

$$I = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(y)f(y)g(y)\mathrm{d}y$$

$$- \int_a^b p(y)f(y)\mathrm{d}y\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b\int_a^b p(x)p(y)f(y)[g(y)-g(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad ②$$

①+②，得

$$I = \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为 $p(x)>0$，$f(x)$，$g(y)$单调，故 $I>0$，即命题成立.

例 15 证明：$\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \ln 2\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u$. D 由 $xy=1, xy=2, y=x, y=4x$ 所围成.

证 因为函数和积分区域的特点，设 $u=xy, v=y/x$，则 D 化为 D'：$1\leqslant u\leqslant 2, 1\leqslant v\leqslant 4, |J|=1/2v$.

$$I = \iint\limits_{D'} f(u)|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u\int_1^4 \frac{1}{v}\mathrm{d}v = \ln 2\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u.$$

三、其它二重积分问题

例 16 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^{x/2}\mathrm{d}t\int_{x/2}^{t}\dfrac{\mathrm{e}^{-(t-u)^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2/4}}\mathrm{d}u$.

解
$$I = \lim_{x\to 0}\frac{-\int_0^{x/2}\mathrm{d}t\int_t^{x/2}\mathrm{e}^{-(t-u)^2}\mathrm{d}u}{1-\mathrm{e}^{-x^2/4}}$$

$$\xlongequal{\text{改变顺序}} \lim_{x\to 0}\frac{-\int_0^{x/2}\mathrm{d}u\int_0^{u}\mathrm{e}^{-(t-u)^2}\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-x^2/4}}$$

$$\xlongequal{\mathrm{L}'} \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}\int_0^{x/2}\mathrm{e}^{-(t-x/2)^2}\mathrm{d}t\right)\Big/\left(\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x^2/4}\right)$$

$$\xlongequal{y=t-x/2} \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}\int_{-x/2}^{0}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right)\Big/\left(\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x^2/4}\right)$$

$$\xlongequal{\mathrm{L}'} \lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x^2/4}\right]\Big/\left[\mathrm{e}^{-x^2/4}\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4}\right)\right] = -\frac{1}{2}.$$

例 17 设 $I(r) = \int_{-r}^{r}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$，求 $I(r)$.

解 不能直接计算. 设 D：$[-r,r;-r,r]$，则

$$I^2(r) = [I(r)]^2 = \int_{-r}^{r}\mathrm{e}^{-x^2}\int_{-r}^{r}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = \iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

分别作 D 的外切圆域 D_2 与内接圆域 D_1，因为 $D_1\subset D_2$，$\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}>0$，故

$$\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant I^2(r) \leqslant \iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

设 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，则 $|J|=\rho$，于是

$$\iint\limits_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^r e^{-\rho^2}\rho d\rho = \pi(1-e^{-r^2}),$$

$$\iint\limits_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}r} e^{-\rho^2}\rho d\rho = \pi(1-e^{-2r^2}).$$

由夹逼性知，$\lim\limits_{r\to\infty}I^2(r)=\pi$，$\lim\limits_{r\to\infty}I(r)=\sqrt{\pi}$，即

$$\int_{-r}^r e^{-u^2}du = \sqrt{\pi} \quad 或 \quad \int_0^r e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

例 18 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_\alpha^{1+\alpha}\dfrac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$；　　(2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+\alpha^2}dx$；

(3) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x dx$.

解 (1) 因为$\dfrac{1}{1+x^2+\alpha^2}$，$\alpha$，$1+\alpha$都是连续函数，故$F(\alpha)=\int_\alpha^{1+\alpha}\dfrac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$也是$\alpha\in\mathbf{R}$的连续函数，所以

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \lim_{\alpha\to 0}F(\alpha) = F(0)$$

$$= \int_0^1\frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(2) $F(\alpha)=\int_{-1}^1\sqrt{x^2+\alpha^2}$也是$\alpha\in\mathbf{R}$的连续函数，故

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+\alpha^2}dx = \lim_{\alpha\to 0}F(\alpha) = F(0) = 2\int_0^1 x dx = 1.$$

(3) $F(\alpha)=\int_0^2 x^2\cos\alpha x dx$也是$\alpha\in\mathbf{R}$的连续函数，故

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x dx = \lim_{\alpha\to 0}F(\alpha) = F(0) = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}.$$

例 19 求下列函数$F(\alpha)$的导数：

(1) $\int_\alpha^{\alpha^2}e^{-\alpha y^2}dy$；　　(2) $\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$；

(3) $\int_0^\alpha\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}dx$；　　(4) $\int_0^\alpha f(x+\alpha,x-\alpha)dx$.

解 可直接套用公式求解.

(1) $$F'(\alpha)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha^2)\mathrm{e}^{-\alpha y^2}\Big|_{y=\alpha^2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha)\mathrm{e}^{-\alpha y^2}\Big|_{y=\alpha}+\int_{\alpha}^{\alpha^2}(\mathrm{e}^{-\alpha y^2})_{\alpha}'\mathrm{d}y$$
$$=2\alpha\mathrm{e}^{-\alpha^5}-\mathrm{e}^{-\alpha^3}-\int_{\alpha}^{\alpha^2}\mathrm{e}^{-\alpha y^2}y^2\mathrm{d}y.$$

(2) $$F'(\alpha)=-\sin\alpha\cdot\mathrm{e}^{\alpha|\sin\alpha|}-\cos\alpha\cdot\mathrm{e}^{\alpha|\cos\alpha|}+\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\mathrm{e}^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

(3) $$F'(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)+\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+\alpha x}\mathrm{d}x=\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2).$$

(4) 设 $u=x+\alpha, v=x-\alpha$,则 $F(\alpha)=\int_0^{\alpha}f(u,v)\mathrm{d}x$.

$$F'(\alpha)=f(2\alpha,0)+\int_0^{\alpha}[f_u'(u,v)-f_v'(u,v)]\mathrm{d}x$$
$$=f(2\alpha,0)+2\int_0^{\alpha}f_u'(u,v)-\int_0^{\alpha}[f_u'(u,v)+f_v'(u,v)]\mathrm{d}x$$
$$=f(2\alpha,0)+2\int_0^{\alpha}f_u'(u,v)\mathrm{d}x-\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(u,v)\mathrm{d}x$$
$$=f(2\alpha,0)+2\int_0^{\alpha}f_u'(u,v)\mathrm{d}x-f(x+\alpha,x-\alpha)\Big|_0^{\alpha}$$
$$=f(2\alpha,0)+2\int_0^{\alpha}f_u'(u,v)\mathrm{d}x-f(2\alpha,0)+f(\alpha,-\alpha)$$
$$=f(\alpha,-\alpha)+2\int_0^{\alpha}f_u'(u,v)\mathrm{d}x.$$

例 20 求下列函数 $F(x)$的二阶导数:

(1) $\int_0^x(x+y)f(y)\mathrm{d}x$, $f(x)$ 可微;

(2) $\int_a^b f(y)|x-y|\mathrm{d}y$, $a<b$, $f(y)$ 可微.

解 按公式求导,视 $F''(x)=[F'(x)]'$.

(1) $F'(x) = 2xf(x) + \int_0^x f(y)\mathrm{d}y$,

$$F''(x) = 2f(x) + 2xf'(x) + f(x) = 3f(x) + 2xf'(x).$$

(2) 当 $x \in (a,b)$ 时,有

$$F(x) = \int_a^x (x-y)f(y)\mathrm{d}y + \int_x^b (y-x)f(y)\mathrm{d}y,$$

故 $$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x (x-y)f(y)\mathrm{d}y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_b^x (y-x)f(y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}[(x-y)f(y)]\mathrm{d}y - \int_b^x \frac{\partial}{\partial x}[(y-x)f(y)]\mathrm{d}y$$

$$= \int_a^x f(y)\mathrm{d}y + \int_b^x f(y)\mathrm{d}y,$$

$$F''(x) = f(x) + f(x) = 2f(x).$$

当 $x \notin (a,b), x \leqslant a$ 时,有 $F(x) = \int_a^b (y-x)f(y)\mathrm{d}y$, 故

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}[(y-x)f(y)]\mathrm{d}y = -\int_a^b f(y)\mathrm{d}y,$$

$$F''(x) = 0.$$

类似地,当 $x > b$ 时,$F''(x) = 0$. 因此

$$F''(x) = \begin{cases} 2f(x), & x \in (a,b), \\ 0, & x \notin (a,b). \end{cases}$$

例 21 利用对参数的微分法计算下列积分:

(1) $\int_0^{\pi/2} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos x + a^2)\mathrm{d}x$.

解 (1) 当 $|a| = |b|$ 时,有

$$\int_0^{\pi/2} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln a^2 = \pi\ln\frac{|a| + |b|}{2}.$$

当 $|a| \neq |b|$ 时,有

$$\int_0^{\pi/2} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln\left[\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{(a^2-b^2)\cos 2x}{2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln\frac{a^2+b^2}{2}+\int_0^{\pi/2}\ln(1-c\cos 2x)\mathrm{d}x,$$

其中 $c=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$，故 $0<|c|<1$. 从而

$$原式=\frac{\pi}{2}\ln\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(1-c\cos u)\mathrm{d}u.$$

设 $I(c)=\int_0^{\pi}\ln(1-c\cos u)\mathrm{d}u$，则

$$I'(c)=\int_0^{\pi}\frac{-\cos u}{1-c\cos u}\mathrm{d}u=\frac{1}{c}\int_0^{\pi}\left[1-\frac{1}{1-c\cos u}\right]\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\pi}{c}-\frac{1}{c}\left[\frac{2}{\sqrt{1-c^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1+c}{1-c}}\tan\frac{x}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{\pi}{c}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\right),\quad 0<|c|<1.$$

故

$$I(c)=\int_0^{c}\frac{\pi}{v}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)\mathrm{d}v$$

$$=\pi\left[\ln|v|+\ln\frac{1+\sqrt{1-v^2}}{|v|}\right]\Bigg|_0^{c}$$

$$=\pi[\ln(1+\sqrt{v^2})]\Big|_0^{c}=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-c^2}}{2}.$$

得 $I\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)=\pi\ln\frac{1}{2}\left(1+\frac{2|ab|}{a^2+b^2}\right)=\pi\ln\frac{(|a|+|b|)^2}{2(a^2+b^2)}.$

从而 $\int_0^{\pi/2}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{2}\ln\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{\pi}{2}\ln\frac{(|a|+|b|)^2}{2(a^2+b^2)}=\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}.$$

可见，不论 $|a|=|b|$ 还是 $|a|\neq|b|$，结果都是相同的.

(2) 利用上例结论

$$\int_0^{\pi}\ln(1-c\cos x)\mathrm{d}x=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-c^2}}{2},$$

有 $原式=\pi\ln(1+a^2)+\int_0^{\pi}\ln\left(1-\frac{2a}{1+a^2}\cos x\right)\mathrm{d}x$

$$= \pi\ln(1+a^2) + \pi\ln\frac{1}{2}\left[1+\sqrt{1-\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^2}\right]$$

$$= \pi\left[\ln(1+a^2) + \ln\frac{1+a^2+|1-a^2|}{2(1+a^2)}\right]$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{当 } |a| \leqslant 1, \\ \pi\ln a^2, & \text{当 } |a| > 1. \end{cases}$$

例 22 应用积分号下微分法或积分法计算下列积分：

(1) $\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x$ ($|a|<1$)；

(2) $\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$ ($b>a>0$).

解 (1) 设 $I(a) = \int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x$，则

$$I'(c) = \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\tan^2 x} \xlongequal{u=\tan x} \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(1+a^2u^2)(1+u^2)}$$

$$= \frac{1}{a^2-1}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{u^2+1/a^2} - \frac{1}{u^2+1}\right]\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{a^2-1}[|a|\arctan|a|u - \arctan u]\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{a^2-1}(|a|-1) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+a}, & a\geqslant 0, \\ \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1-a}, & a<0. \end{cases}$$

当 $a=0$ 时，$I(a)=0$；

当 $a>0$ 时，$I(a) = \frac{\pi}{2}\int_0^a\frac{\mathrm{d}v}{1+v} = \frac{\pi}{2}\ln(1+a)$；

当 $a<0$ 时，$I(a) = \frac{\pi}{2}\int_0^a\frac{\mathrm{d}v}{1-v} = -\frac{\pi}{2}\ln(1-a)$.

综上所述，得

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(\operatorname{sgn}a)\ln(1+|a|).$$

(2) $\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\int_a^b x^y\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\mathrm{d}x.$$

当 $x=0$ 时，$\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y$ 理解为零，则 $\sin\left(\ln\frac{1}{2}\right)x^y$ 在域：$0\leqslant x\leqslant 1, a\leqslant y\leqslant b$ 上连续，故可交换积分次序.

作代换 $x=\mathrm{e}^{-1}$，得

$$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y+1)t}\sin t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{1+(1+y)^2}[-(y+1)\sin t-\cos t]\mathrm{e}^{-(y+1)t}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{1+(1+y)^2}.$$

于是
$$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{1+(1+y)^2}=\arctan(1+y)\Big|_a^b$$

$$=\arctan(1+b)-\arctan(1+a)$$

$$=\arctan\frac{b-a}{1+(1+b)(1+a)}.$$

类似可得

$$\int_0^1\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{1+y}{1+(1+y)^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\ln[1+(1+y^2)]\Big|_a^b=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}.$$

第三节　三重积分

主要内容

1. 设 f 是定义在长方体 $V\subset\mathbf{R}^3$ 上的函数，J 是一个确定的

数. 若$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0,\forall\ T\in V$,只要$\|T\|<\delta$,属于分割$T$的所有积分和都有

$$\left|\sum f(\xi_i,\eta_i,\zeta_k)\Delta V_{ijk}-J\right|<\varepsilon,$$

则称f在V上可积,J为f在V上的三重积分,记作

$$J=\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad \text{或}\quad \int_V f.$$

2. 称函数

$$\hat{f}(x,y,z)=\begin{cases}f(x,y,z), & (x,y,z)\in V,\\ 0, & (x,y,z)\in\hat{V}\setminus V\end{cases}$$

为f在$\hat{V}$上的延拓函数.

3. 若$f(x,y,z)$在$V=[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$上的三重积分$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$存在,且对任何$x\in[a,b]$,二重积分$I(x)=\iint_D f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$存在$(D=[c,d]\times[e,f])$,则

$$\int_a^b\mathrm{d}x\iint_D f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

存在,且

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b\mathrm{d}x\iint_D f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d\mathrm{d}y\int_e^f f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

4. 设$V=\{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y),y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),a\leqslant x\leqslant b\}$,$V$在$xoy$平面上的投影区域$D=\{(x,y)\mid y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),a\leqslant x\leqslant b\}$是$x$-型区域,它对于平行$z$轴且通过$D$内点的直线与$V$的边界至多交于两点.

设f在V上连续,$z_1(x,y),z_2(x,y)$在D上连续,$y_1(x)$,$y_2(x)$在$[a,b]$上连续,则有

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

5. 设 f 在有界闭区域 V 上连续，则

$$I = \iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{V'} f[\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w)]|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

其中 $J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$.

(1) 若 $\begin{cases} x=r\cos\theta, & 0\leqslant r\leqslant+\infty, \\ y=r\sin\theta, & 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, \\ z=z, & -\infty<z<+\infty, \end{cases}$ $J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=r$，则

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{V'} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

称为柱坐标下的三重积分.

(2) 若 $\begin{cases} x=r\cos\theta\sin\theta, & 0\leqslant r\leqslant+\infty, \\ y=r\sin\theta\sin\varphi, & 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, \\ z=r\cos\theta, & 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, \end{cases}$ $J=r^2\sin\varphi$，则

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{V'} f(r\cos\theta\sin\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

称为球坐标下的三重积分.

疑 难 解 析

1. 怎样理解三重积分的累次积分公式?

答 主要内容 4 所给出的累次积分公式，只是一种积分顺序

的体现，实际上，三个自变量可以有六种不同的积分顺序. 要根据具体情形（包括积分域的考虑和积分函数的考虑）和个人的习惯来选择. 在选择时，要考虑区域少分块，因为分块越多积分次数越多（当平行坐标轴的直线与区域边界交点多于两个时就要分块，所以要选择好顺序，避免出现多于两个交点的情形）. 同时，更要考虑内层积分限函数简化，以便使后面的积分计算较为容易.

三重积分除了化为三次积分外，还可以化为先二重积分后一次积分或者先一次积分后二重积分的形式，这主要由被积函数的因素并结合积分区域来考虑. 详见后面的例题.

2. 怎样选择三重积分的坐标系?

答 如同二重积分，选择坐标系的出发点是积分区域的形状与被积函数的形式. 当积分区域为正方体、长方体及一般的多面体，或一般形式的函数时，通常选择直角坐标系，因此选择直角坐标系的时候最多. 当 V 为柱形区域，其投影域适用极坐标表示，或被积函数含投影域坐标的二次式（如 x^2+y^2, y/x）时，一般选择柱坐标系. 当 V 为球形区域及其部分，或被积函数含 $x^2+y^2+z^2$ 因式时，一般选择球坐标系. 有时还因某些特殊函数或特定区域选择特定的代换.

方法、技巧与典型例题分析

计算三重积分，首先要对空间解析几何概念，特别是空间的平面、二次曲面的特点和形状有一个正确的认识. 一般要先作出空间立体（积分区域）的草图，确定选择哪种坐标系和什么样的积分顺序；然后再按照确定的坐标系与积分顺序写出积分区域的不等式组表示；再配置积分限，进行逐次积分. 逐次积分时，可以运用定积分的所有技巧与方法.

例 1 计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_V y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由 $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$，$x^2+z^2=1$，$y=1$ 所围成；

(2) $\iiint\limits_V xy^2z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由 $z=xy$，$y=x$，$x=1$，$z=0$ 所围成；

(3) $\iiint\limits_V y\cos(x+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由 $y=\sqrt{x}$，$y=0$，$z=0$，及 $x+z=\pi/2$ 所围成；

(4) $\iiint\limits_V xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$ 所围成.

解 (1) 如图 13.13 所示，V 用直角坐标系可表示为

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\ -\sqrt{1-x^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2},\\ -\sqrt{1-x^2-z^2}\leqslant y\leqslant 1,\end{cases}$$

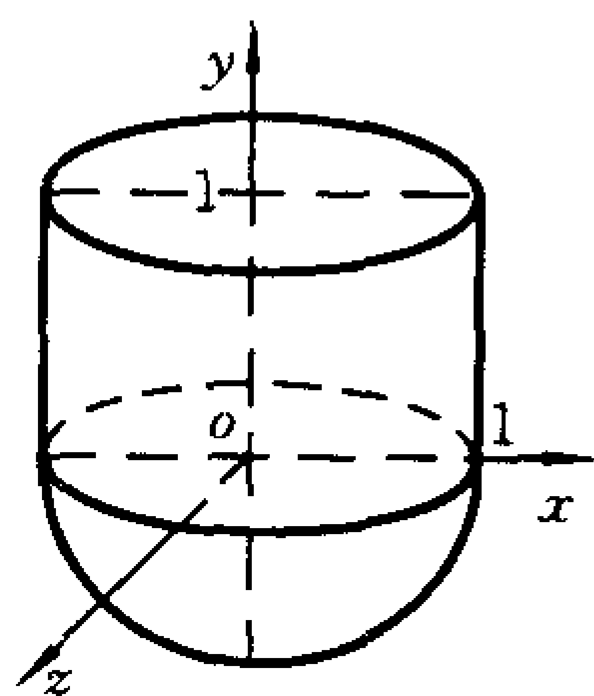


图 13.13

则

$$I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{1-z^2-x^2}}^{1}y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}(x^2+z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\left[x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(-\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{28}{45}.$$

(2) 如图 13.14 所示，V 表示为$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0\leqslant y\leqslant x,\\ 0\leqslant z\leqslant xy,\end{cases}$ 则

$$I=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x y^2\mathrm{d}y\int_0^{xy}z^3\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\int_0^1 x^5\mathrm{d}x\int_0^x y^6\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}\mathrm{d}x = \frac{1}{364}.$$

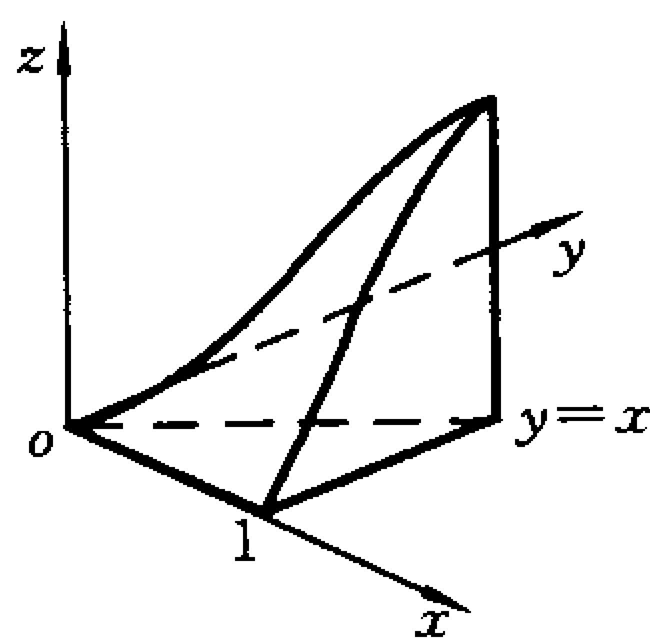


图 13.14

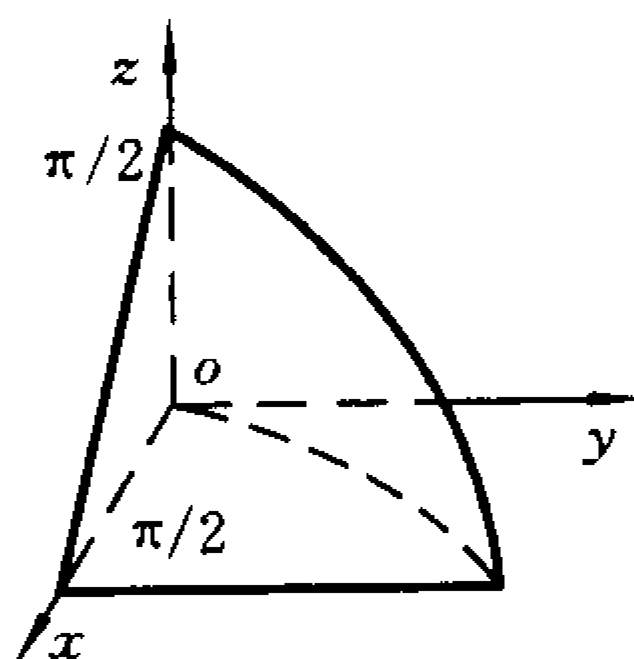


图 13.15

(3) 如图 13.15 所示，V 表示为$\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant \pi/2, \\ 0\leqslant y\leqslant \sqrt{x}, \\ 0\leqslant z\leqslant \pi/2-x, \end{cases}$ 则

$$I = \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}\mathrm{d}y\int_0^{\pi/2-x} y\cos(x+z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}} y(1-\sin x)\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2}(1-\sin x)\,\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}(-x\cos x + \sin x)\right]\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

(4) V 表示为$\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 0\leqslant y\leqslant \sqrt{1-x^2}, \\ 0\leqslant z\leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}, \end{cases}$ 则

$$I = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(1-x^2-y^2)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{48}.$$

在以下例题中，除非必要，我们不再写出 V 的不等式组，请读者自己通过作草图得出.

例 2 计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_V \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz$，$V$ 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$z=1$，$z=2$ 所围成；

(2) $\iiint\limits_V \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdydz$，$V$ 由 $x^2+y^2=z^2$，$z=1$ 所围成；

(3) $\iiint\limits_V zdxdydz$，V 由 $x^2+y^2+z^2=4$，$z=\frac{1}{3}(x^2+y^2)$ 所围成.

解 (1) V 是柱形区域，适合柱坐标系，故

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 rdr\int_1^2\frac{e^z}{r}dz=2\pi\int_0^2(e^2-e)dr$$
$$=2\pi(e^2-e)\cdot 2=4\pi(e^2-e).$$

(2) V 是柱形区域，适合柱坐标系，故

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_r^1\frac{1}{1+r^2}dz=2\pi\int_0^1\frac{r}{1+r^2}(1-r)dr$$
$$=2\pi\int_0^1\frac{r-(1+r)^2+1}{1+r^2}dr$$
$$=2\pi\left[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)-r+\arctan r\right]\Big|_0^1$$
$$=2\pi\left[\frac{1}{2}\ln 2-1+\frac{\pi}{4}\right]=\pi\left[\ln 2-2+\frac{\pi}{2}\right].$$

(3) V 是柱形区域，适合柱坐标系，故

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}rdr\int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}}zdz$$
$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}r\left(4-r^2-\frac{r^4}{9}\right)dr=\frac{13}{4}\pi.$$

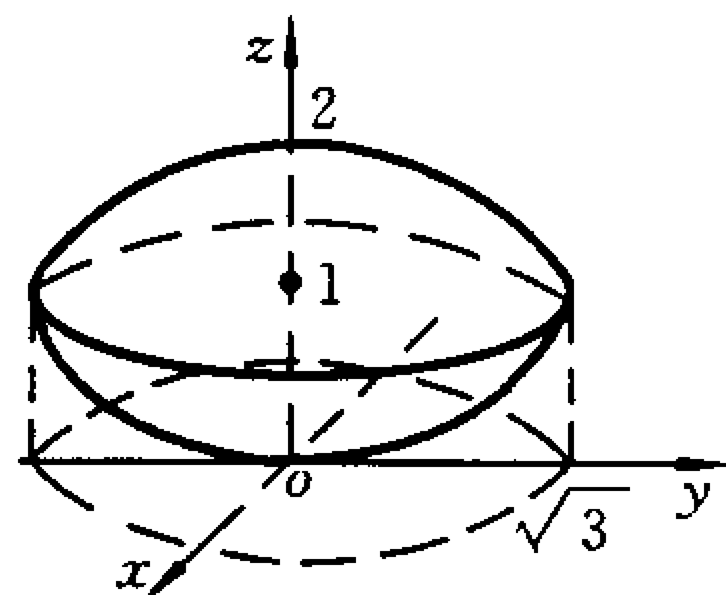


图 13.16

也可以用先重后单的累次积分计算，因为被积函数是一个变量 z 的函数，而投影区域又可表示为 z 的函数，故

$$I = \int_0^1 z\mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 3z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_1^2 z\mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4-z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 z(3\pi z)\mathrm{d}z + \int_1^2 z[\pi(4-z^2)]\mathrm{d}z$$

$$= 3\pi\int_0^1 z^2\mathrm{d}z + \pi\int_1^2 (4z - z^3)\mathrm{d}z$$

$$= \pi + 9\pi/4 = 13\pi/4.$$

例 3 计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 和 $z=\sqrt{b^2-x^2-y^2}$，$z=0$ $(b>a>0)$ 所围成；

(2) $\iiint\limits_V z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由 $z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}$，$1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4$ 所围成；

(3) $\iiint\limits_V \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由 $z^2=x^2+y^2$，$z^2=3x^2+y^2$，$z=1$ 所围成.

解 (1) V 是球形域，适合球坐标系，故

$$I = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_a^b r^2\sin^2\varphi\, r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi/2}\frac{b^5-a^5}{5}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi \text{（瓦里士公式）}$$

$$= 2\pi\cdot\frac{b^5-a^5}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{15}\pi(b^5-a^5).$$

(2) V 是部分球形域，适合球坐标系，故

$$I = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_1^2 r^2\sin\varphi\, r\cos\varphi\, r^2\sin^2\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\cdot\frac{63}{6}\int_0^{\pi/4}\sin^3\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 21\pi\int_0^{\pi/4}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}(\sin\varphi)$$

$$= \frac{21}{4}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{21}{16}\pi.$$

(3) V 表示 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\pi/6\leqslant\varphi\leqslant\pi/4,0\leqslant r\leqslant 1/\cos\varphi$,故

$$
\begin{aligned}
I&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\pi/6}^{\pi/4}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{1/\cos\theta}\left(r+\frac{1}{r^2}\right)r^2\mathrm{d}r\\
&=2\pi\int_{\pi/6}^{\pi/4}\left(\frac{1}{4\cos^4\varphi}+\frac{1}{\cos^4\varphi}\right)\mathrm{d}(-\cos\varphi)\\
&=2\pi\left[\frac{1}{12}\cos^{-3}\varphi-\ln(\cos\theta)\right]\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/4}\\
&=\pi\left(\frac{9\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{27}-\ln\frac{2}{3}\right).
\end{aligned}
$$

例 4 用不同顺序配置下列三重积分的积分限:

(1) $\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{x+y}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;

(2) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解 (1) 如图 13.17 所示,V 由 $x=0,y=0,z=0,x+y=1,x+y=z$ 所围成. 若先对 y 积分,则 $D_{xz}:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1$,$V$ 可用平面 $z=x$ 分为 V_1 和 V_2. 故

$$
\begin{aligned}
I&=\iiint_{V_1}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_{V_2}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^z\mathrm{d}z\int_0^{1-z}f(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_z^1\mathrm{d}z\int_{z-x}^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

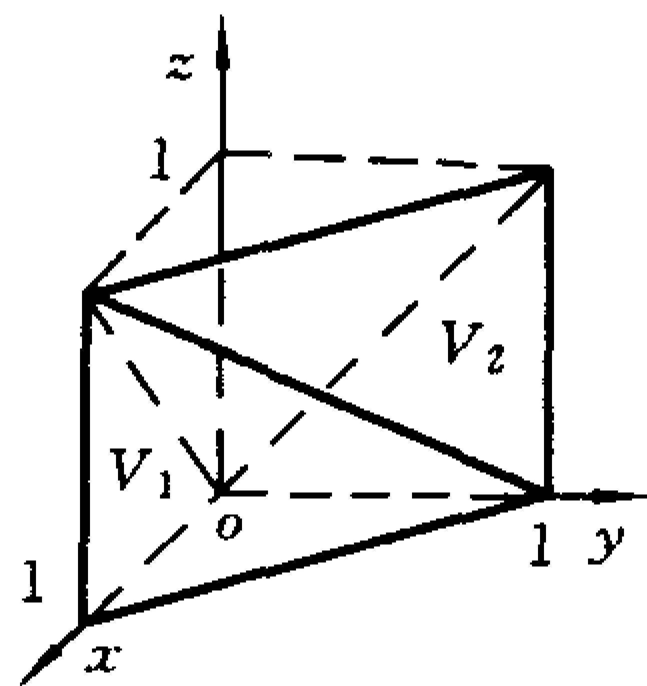


图 13.17

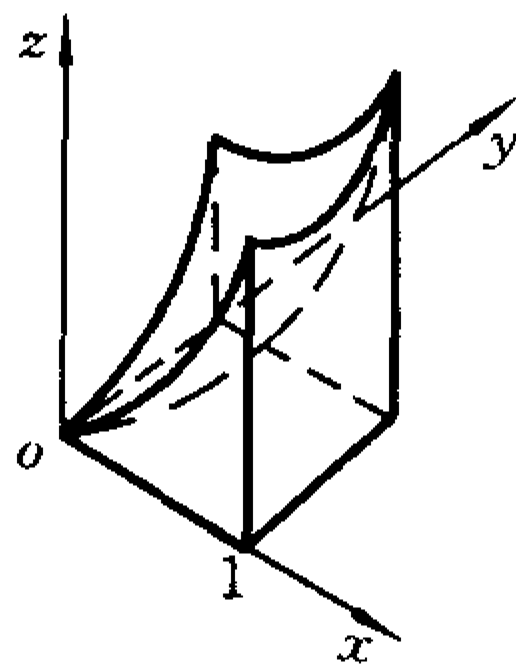


图 13.18

若先对 x 积分,则 $D_{yz}:0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1$,用平面 $z=y$ 将 V 分为 V_1 与 V_2,故

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}z\int_z^1 \mathrm{d}y\int_0^{1-y} f(x,y,z)\mathrm{d}x+\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^z \mathrm{d}y\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\mathrm{d}x.$$

(2) V 如图 13.18 所示，则

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}z\left[\int_0^{\sqrt{z}} \mathrm{d}y\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{z}}^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]$$

$$+\int_1^2 \mathrm{d}z\int_{\sqrt{z-1}}^1 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{z-y^2}} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\left[\int_0^{x^2} \mathrm{d}z\int_0^1 f(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_{x^2}^{x^2+1} \mathrm{d}z\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}y\right]$$

例 5 选择坐标系计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_V \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}}$，$V$：$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$，$h>R$；

(2) $\iiint\limits_V \left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围成；

(3) $\iiint\limits_V \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 是 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 在第一卦限的部分．

解 (1) 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$，则

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-R}^R \mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+(z-h)^2}}$$

$$=\pi\int_{-R}^R \mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{\mathrm{d}r^2}{\sqrt{r^2+(z-h)^2}}$$

$$=2\pi\int_{-R}^R\left[\sqrt{R^2+h^2-2zh}-(h-z)\right]\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\left[-\frac{1}{3h}(r^2+h^2-2hz)^{3/2}+\frac{1}{2}(h-z)^2\right]\Bigg|_{-R}^{R}=\frac{4\pi R^3}{3h}.$$

此题也可用球坐标系代换来求解.

(2) 如图 13.19 所示，球面将 V 分为 V_1 和 V_2，故用球坐标

系，得

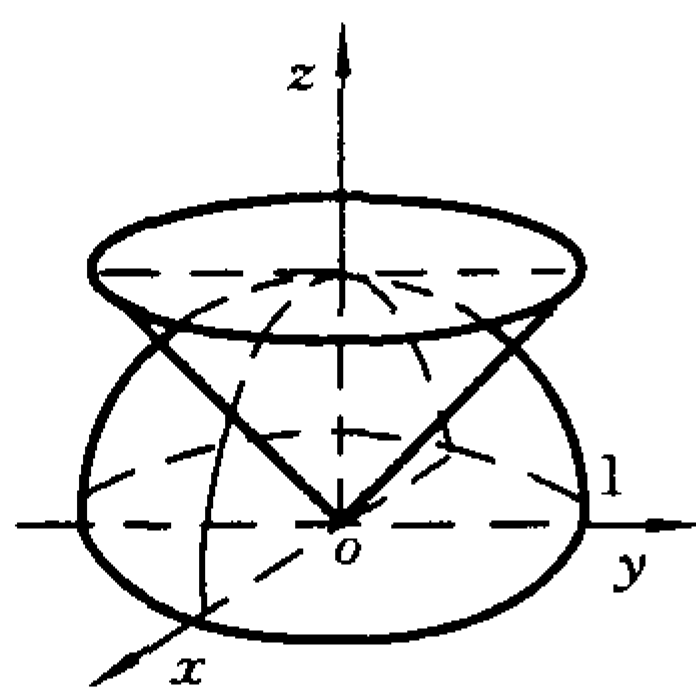


图 13.19

$$I = \iiint\limits_{V_1} (1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$+ \iiint\limits_{V_2} (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\left[\int_0^1 (1 - r)r^2\sin\theta\mathrm{d}r\right.$$

$$\left. + \int_1^{1/\cos\theta}(r - 1)r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\right]$$

$$= 2\pi\left[\int_0^{\pi/4}\sin\theta\cdot\frac{1}{12}\mathrm{d}\theta + \int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4\cos^4\theta} - \frac{1}{3\cos^3\theta}\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/4} + 2\pi\left(\frac{1}{12\cos^3\theta} - \frac{1}{6\cos^2\theta}\right)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi}{6}(\sqrt{2} - 1).$$

(3) 作广义球坐标代换：$x = ra\sin\varphi\cos\theta, y = rb\sin\varphi\sin\theta, z = rc\cos\varphi$，$|J| = abcr^2\sin\varphi$，故

$$I = 8\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 abcr^2\sin\varphi\sqrt{1 - r^2}\mathrm{d}r$$

$$= 4\pi abc\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\sqrt{1 - r^2}\mathrm{d}r$$

$$\xlongequal{r = \sin t} 4\pi abc\int_0^{\pi/2}\sin^2 t(1 - \sin^2 t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\pi^2 abc.$$

例 6 计算三重积分 $\iiint\limits_V (x^3y - 3xy^2 + 3xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由球面 $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 1$ 所围成．

解 V 关于平面 $y = x$ 对称，故

$$\iiint\limits_V xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_V x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

于是 $$I = \iiint\limits_V [y(x - 1)^3 + (y - 1) + 1]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_V y(x-1)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_V (y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

由被积函数对积分区域的奇偶性，得

$$I=0+0+4\pi/3=4\pi/3.$$

例 7 用轮换对称性计算下列三重积分：

(1) $\iiint_V (3x^2+5y^2+7z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 及 $z\geqslant 0$ 所围成；

(2) $\iiint (x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，考虑 V 为正方体，$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1$；或 $V: x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$.

解 (1) 被积函数是关于 $V_1: x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 的偶函数，具有轮换对称性，于是

$$I=\frac{1}{2}\iiint_{V_1}(3x^2+5y^2+7z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\frac{5}{2}\iiint_{V_1}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{5}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{5}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{R^5}{5}\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=2\pi R^5.$$

(2) 利用轮换对称性化简被积函数，于是

$$I=\iiint_V (3x^2+6xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(3x^2+6xy)\mathrm{d}y\int_0^1\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 3(x^2+x)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}.$$

当 V 为 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$，还可利用奇偶性. 于是

$$I=3\iiint_V x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+6\iiint_V xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=24\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\sin^3\varphi\cos\theta\mathrm{d}r+0$$

$$=24\cdot\frac{R^5}{5}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{4}{5}\pi R^5.$$

例 8 计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_V z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 是 $x^2+y^2+z^2=2Rz$ 与 $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ 的公共部分；

(2) $\iiint\limits_V \mathrm{e}^{|z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$：$x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$.

解 由于被积函数是一个变量的函数，而平行该变量的平面与 V 的截面积又是该变量的函数，故三重积分可以化为"先重后单"的形式.

(1) 平面 $z=R/2$ 上、下截面积表示式不同，应分区域积分.

$$I=\int_0^{R/2} z^2 \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2Rz-z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{R/2}^{R} z^2\mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2-z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_0^{R/2} z^2(2Rz-z^2)\mathrm{d}z+\pi\int_{R/2}^{R} z^2(R^2-z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\pi\left(\frac{R}{2}z^4-\frac{z^5}{5}\right)\Bigg|_0^{R/2}+\pi\left(\frac{R}{3}z^3-\frac{z^5}{5}\right)\Bigg|_{R/2}^{R}=\frac{59}{480}\pi R^5.$$

(2) 注意到 $\mathrm{e}^{|z|}$ 为 z 的偶函数，故

$$I=2\int_0^1 \mathrm{e}^z\mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1-z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^1 \mathrm{e}^z(1-z^2)\mathrm{d}z \xlongequal{\text{分部积分}} 2\pi.$$

例 9 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，证明：

$$\iiint\limits_V f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)\mathrm{d}x, V: x^2+y^2+z^2\leqslant 1.$$

证 被积函数是 x 一个变量的函数，平行 yoz 平面的截面积为 $\pi(1-x^2)$，故

$$\iiint\limits_V f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \iint\limits_{y^2+z^2\leqslant 1-x^2} \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\pi\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)\mathrm{d}x.$$

例 10 设 $F(t)=\iiint\limits_V f(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$f$ 为可微函数，证明：

$F'(t)=\frac{3}{t}\left[F(t)+\iiint\limits_V xyzf'(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]$，$V$ 由 $0\leqslant x\leqslant t,0\leqslant y\leqslant t,0\leqslant z\leqslant t,t>0$ 所围成.

证 令 $x=ut,y=vt,z=wt$，则 $0\leqslant u,v,w\leqslant 1$，因此

$$F(t)=\iiint\limits_{V'} t^3 f(uvwt^3)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

$$\begin{aligned}F'(t)&=\iiint\limits_{V'}[3t^2f(uvwt^3)+t^3f'(uvwt^3)\cdot 3t^2uvw]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\&=\frac{3}{t}\iiint\limits_{V'}[t^3f(uvwt^3)+t^3tutvtwf'(uvwt^3)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\&=\frac{3}{t}\left[F(t)+\iiint\limits_V xyzf'(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right].\end{aligned}$$

例 11 设 $F(t)=\iiint\limits_V f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$f$ 连续，f' 存在，$f(0)=0,f'(0)=1,V:x^2+y^2+z^2\leqslant t^2$. 求 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{F(t)}{t^5}$.

解 用球坐标计算 $F(t)$，得

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^t r^2f(r^2)\mathrm{d}r=4\pi\int_0^t r^2f(r^2)\mathrm{d}r,$$

则 $$F'(t)=4\pi t^2f(t^2),\quad F(0)=0.$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{t^5}&\xlongequal{\mathrm{L'}}\lim_{t\to 0}\frac{F'(t)}{5t^4}=\lim_{t\to 0}\frac{4\pi}{5}\cdot\frac{f(t^2)}{t^2}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{4\pi}{5}\cdot\frac{f(t^2)-0}{t^2}=\frac{4\pi}{5}f'(0)=\frac{4}{5}\pi.\end{aligned}$$

例 12 设 $f(x)$ 有连续导数，$V:x^2+y^2+z^2\leqslant t^2$，求 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解 $\iiint\limits_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^t f(r) r^2 dr$$

$$= 2\pi \cdot 2 \cdot \int_0^t f(r) r^2 dr = 4\pi \int_0^t r^2 f(r) dr,$$

则 $$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\pi t^4} \iiint_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dx dy dz$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{4\pi}{\pi t^4} \int_0^t r^2 f(r) dr \xlongequal{L'} \lim \frac{4\pi t^2 f(t)}{4\pi t^3}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} \xlongequal{L'} f'(0).$$

当 $f(t) \neq 0$ 时，极限为 $+\infty$.

例 13 设 $f(x)$ 连续，V 由 $0 \leqslant z \leqslant h$ 和 $x^2+y^2 \leqslant t^2$ 所围成，$F(t) = \iiint_V [f(x^2+y^2)+z^2] dx dy dz$. 求 $\frac{dF}{dt}$ 和 $\lim_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{t^2}$.

解 $$F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t r dr \int_0^h [f(r^2)+z^2] dz$$

$$= 2\pi \int_0^t \left[\frac{h^3}{3} + f(r^2) h\right] r dr,$$

则 $$\frac{dF}{dt} = 2\pi \left[\frac{h^3}{3} + f(t^2) h\right] t = 2\pi h t \left[\frac{h^3}{3} + f(t^2)\right],$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{t^2} \xlongequal{L'} \lim_{t\to 0} \frac{2\pi h t [h^2/3 + f(t^2)]}{2t} = \pi h \left[\frac{h^2}{3} + f(0)\right].$$

例 14 求函数 $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ 在 $V: x^2+y^2+z^2 \leqslant x+y+z$ 的平均值 $\overline{f}(x,y,z)$.

解 $$\overline{f}(x,y,z) = \frac{1}{V} \iiint_V f(x,y,z) dx dy dz.$$

将 V 写成 $(x-1/2)^2+(y-1/2)^2+(z-1/2)^2 \leqslant 3/4$，故 $V = \sqrt{3}\pi/2$.

作坐标变换：$x = 1/2 + r\sin\varphi\cos\theta$，$y = 1/2 + r\sin\varphi\cos\theta$，$z = 1/2 + r\cos\varphi$，$J = r^2\sin\varphi$，则 V_1 为 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$，$0 \leqslant r \leqslant \sqrt{3}/2$，故

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$
$$\cdot\int_0^{\sqrt{3}/2}\left[\frac{3}{4}r^2+r(\sin\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta+\cos\varphi)\right]r^2\mathrm{d}r$$
$$=2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{3}/2}\left[\frac{3}{4}r^2+r^2\right]r^2\mathrm{d}r$$
$$=2\pi\cdot 2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{20}=\frac{3\sqrt{3}}{5}\pi.$$

于是

$$\overline{f}(x,y,z)=\frac{3\sqrt{3}}{5}\pi\Big/\frac{\sqrt{3}}{2}\pi=\frac{6}{5}.$$

第四节　重积分的应用

主要内容

1. $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示区域 D 的面积.

2. $\iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 表示区域 V 的体积；若它是底为 D、曲顶为 $z=f(x,y)$ 的曲顶柱体，则 $V=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

3. 设 D 为可求面积的平面有界区域，函数 f 在 D 上有连续偏导数，则曲面 $S:z=f(x,y),(x,y)\in D$ 的面积

$$\Delta S=\iint\limits_D\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|\cos(n,z)|}.$$

当 S 由 $x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),(u,v)\in D$ 确定，且分别在 D 上有连续的一阶偏导数，$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$ 中至少有一个不等于零，则

$$\Delta S=\iint_{D'}\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

D' 是 D 经代换后的区域：$E=x_u^2+y_u^2+z_u^2, F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v, G=x_v^2+y_v^2+z_v^2$.

4. 密度为 $\rho(x,y,z)$ 的空间物体 V 的重心公式

$$\bar{x}=\frac{\iiint_V x\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{\iiint_V \rho(x,y,z)\mathrm{d}V},\bar{y}=\frac{\iiint_V y\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{\iiint_V \rho(x,y,z)\mathrm{d}V},\bar{z}=\frac{\iiint_V z\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{\iiint_V \rho(x,y,z)\mathrm{d}V}.$$

密度为 $\rho(x,y)$ 的平面薄板 D 的重心公式

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma},\quad \bar{y}=\frac{\iint_D y\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}.$$

5. 密度为 $\rho(x,y,z)$ 的空间物体 V 的转动惯量公式

$$J_x=\iiint_V (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V,\quad J_y=\iiint_V (z^2+x^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V,$$

$$J_z=\iiint_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V.\quad J_{xy}=\iiint_V z^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}V,$$

$$J_{yz}=\iiint_V x^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}V,\qquad J_{zx}=\iiint_V y^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}V.$$

密度为 $\rho(x,y)$ 的平面薄板 D 的转动惯量公式

$$J_x=\iint_D y^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma,\qquad J_y=\iint_D x^2\rho(x,y)\mathrm{d}v,$$

$$J_l=\iint_D r^2(x,y)\rho(x,y)\mathrm{d}v.$$

设 l 为转动轴，则 $r(x,y)$ 为转动轴 l 到 D 的距离.

6. 密度为 $\mu(x,y,z)$ 的立体 V 到质量为 1 的质点 A 的引力公式

$$F_x = k\iiint\limits_V \frac{x-\xi}{r^2}\mu \mathrm{d}V, \quad F_y = k\iiint\limits_V \frac{y-\eta}{r^2}\mu \mathrm{d}V,$$

$$F_z = k\iiint\limits_V \frac{z-\zeta}{r^2}\mu \mathrm{d}V. \quad \boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}.$$

其中 k 为引力系数,(ξ,η,ζ) 为点 A 的坐标.

方法、技巧与典型例题分析

重积分的应用包括几何应用和物理应用.求解这类问题除了牢记必要的公式外,更重要的是应认真分析具体情况,了解问题的条件和可以利用的结果,讨论怎样求得需要的结果(包括坐标系的选取、积分微元的选取,可利用的计算手段和方法等).

一、重积分的几何应用

例 1 求下列曲线所围图形的面积:

(1) $xy=a^2, x+y=5a/2 \quad (a>0)$;

(2) $(x^2+y^2)=2a^2(x^2-y^2), x^2+y^2=a^2(x^2+y^2\geqslant a^2, a>0)$.

解 (1) 如图 13.20 所示,交点 $A\left(\frac{a}{2},2a\right), B\left(2a,\frac{a}{2}\right)$.故

$$\Delta S = \int_{a/2}^{2a}\mathrm{d}x\int_{a^2x}^{5a/2-x}\mathrm{d}y = \int_{a/2}^{2a}\left(\frac{5}{2}a - x - \frac{a^2}{x}\right)\mathrm{d}x$$
$$= 15a^2/8 - 2a^2\ln 2.$$

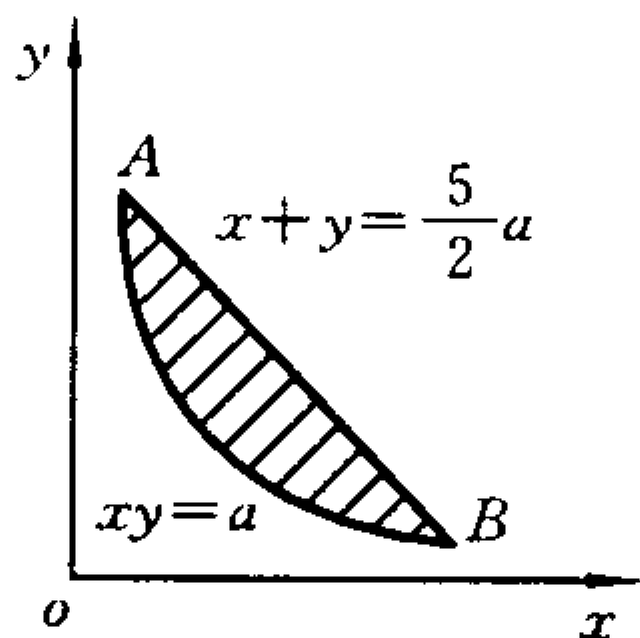


图 13.20

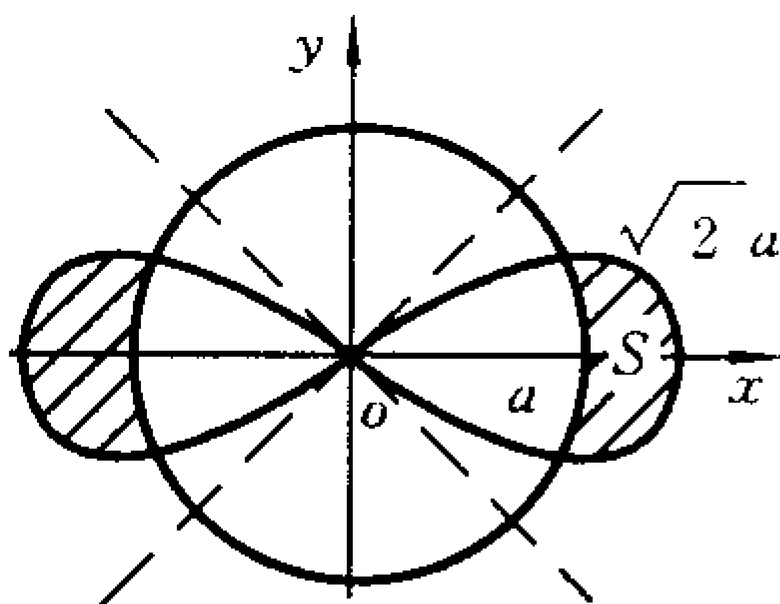


图 13.21

(2) 如图 13.21 所示,所求面积为阴影部分.由对称性知,$S=$

$4S_1$. 故

$$\Delta S = 4\Delta S_1 = 4\int_0^{\pi/6} d\theta \int_a^{\sqrt{2a^2\cos 2\theta}} r dr$$

$$= 2\int_0^{\pi/6} (2a^2\cos 2\theta - a^2) d\theta = a^2\left(\sqrt{3} - \pi/3\right).$$

例 2 进行适当变量代换，计算下列曲线所围成的面积：

(1) $x+y=a, x+y=b, y=\alpha x, y=\beta x$ $(0<a<b, 0<\alpha<\beta)$；

(2) $xy=a^2, xy=2a^2, y=x, y=2x$ $(x>0, y>0)$.

解 (1) 作代换 $x+y=u, y/x=v$，则 $a\leqslant u\leqslant b, \alpha\leqslant v\leqslant \beta$，且 $|J|=u/(1+v)^2$. 于是

$$\Delta S = \int_a^b u du \int_\alpha^\beta \frac{dv}{(1+v)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{(1+\alpha)(1+\beta)}.$$

(2) 作代换 $xy=u, y/x=v$，则 $a^2\leqslant u\leqslant 2a^2, 1\leqslant u\leqslant 2$，且 $|J|=1/(2v)$. 于是

$$\Delta S = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{2a^2} du \int_1^2 \frac{dv}{v} = \frac{1}{2}a^2\ln 2.$$

例 3 计算下列立体体积：

(1) 圆柱 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 与 $x^2+z^2\leqslant R^2$ 的公共部分；

(2) 曲面 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 与 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$ 的公共部分；

(3) 曲面 $x^2+y^2=az$ 与 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$所围成的立体；

(4) 球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 被柱面 $x^2+y^2=ax$ 截下的部分.

解 先作草图求出交线，确定投影区域，再配置积分限，进行积分. 可选择二重积分，也可选择三重积分.

(1) 如图 13.22 所示，$V=8V_1$，D_1：$0\leqslant x\leqslant R, 0\leqslant y\leqslant \sqrt{R^2-x^2}$，于是

$$V = 8V_1 = 8\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2} dy$$

$$= 8\int_0^R (R^2-x^2) dx = \frac{16}{3}R^3.$$

(2) $V: R-\sqrt{R^2-r^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{R^2-r^2}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant \sqrt{3}/2R$(由 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2=2Rz$ 消去 z,得 $x^2+y^2=3R^2/4\Rightarrow$投影域 $D_{xy}: 0\leqslant r\leqslant\sqrt{3}R/2$). 于是

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}R/2}rdr\int_{R-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}}dz$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{3}R/2}r(2\sqrt{R^2-r^2}-R)dr=\frac{5}{12}\pi R^3.$$

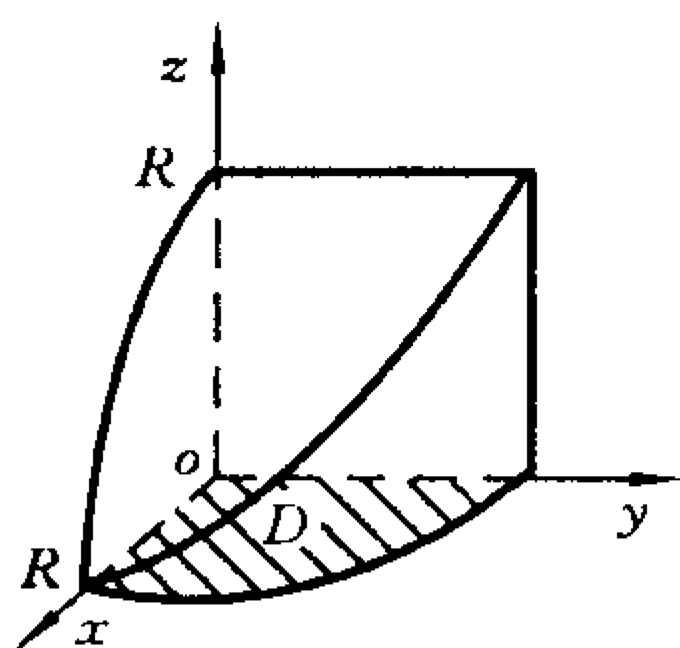


图 13.22

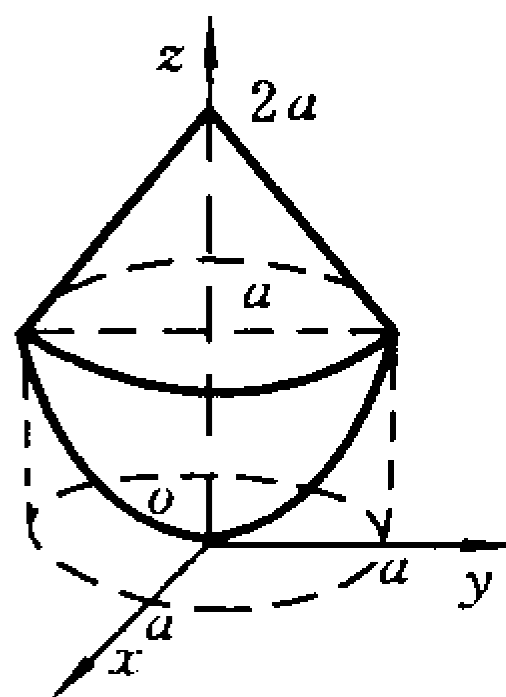


图 13.23

(3) 如图 13.23 所示,由 $x^2+y^2=az$ 与 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ 消去 z,得 $x^2+y^2=a^2\Rightarrow$投影域 $D_{xy}: 0\leqslant r\leqslant a$. 于是

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_{r^2/a}^{2a-r}dz=2\pi\int_0^a r\left(2a-r-\frac{r^2}{a}\right)dr$$

$$=2\pi\left(ar-\frac{1}{3}r^3-\frac{1}{4a}r^4\right)\Big|_0^a=\frac{5}{6}\pi a^3.$$

(4) V 关于 xoy 平面与 xoz 平面对称,故

$$V=4\iint_D\sqrt{a^2-r^2}rdrd\theta=4\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}rdr$$

$$=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)d\theta=\frac{4}{3}a^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

例 4 求下列立体体积:

(1) 由 $z=xy, x+y+z=1, z=0$ 所围成;

(2) 由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}, z=0$ 所围成;

(3) 由$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z}{c}=1, z=0$所围成.

解 用二重积分计算更简单些.

(1) 立体如图 13.24(a)所示，投影域如 13.24(b)所示. V 分为 $V_1: 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant \frac{1-x}{1+x}, z=xy$ 和 $V_2: 0\leqslant x\leqslant 1, \frac{1-x}{1+x}\leqslant y\leqslant 1-x, z=1-x-y$. 于是

$$
\begin{aligned}
V &= V_1 + V_2 \\
&= \int_0^1 dx\int_0^{(1-x)/(1+x)} y dy + \int_0^1 dx\int_{(1-x)/(1+x)}^{1-x} (1-x-y) dy \\
&= (-11/4 + 4\ln 2) + (25/6 - 6\ln 2) = 17/12 - 2\ln 2.
\end{aligned}
$$

(2) 立体在 xoy 面上投影域边界为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$，即

$$
\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.
$$

令$\frac{x}{a}=\frac{1}{2}+r\cos\theta, \frac{y}{b}=\frac{1}{2}+r\sin\theta$，

则 $z=c[1/2+r(\cos\theta+\sin\theta)+r^2]$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant 1/\sqrt{2}$;

$$
|J|=abr.
$$

于是

$$
V=\iint_D c\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right) dx dy
$$

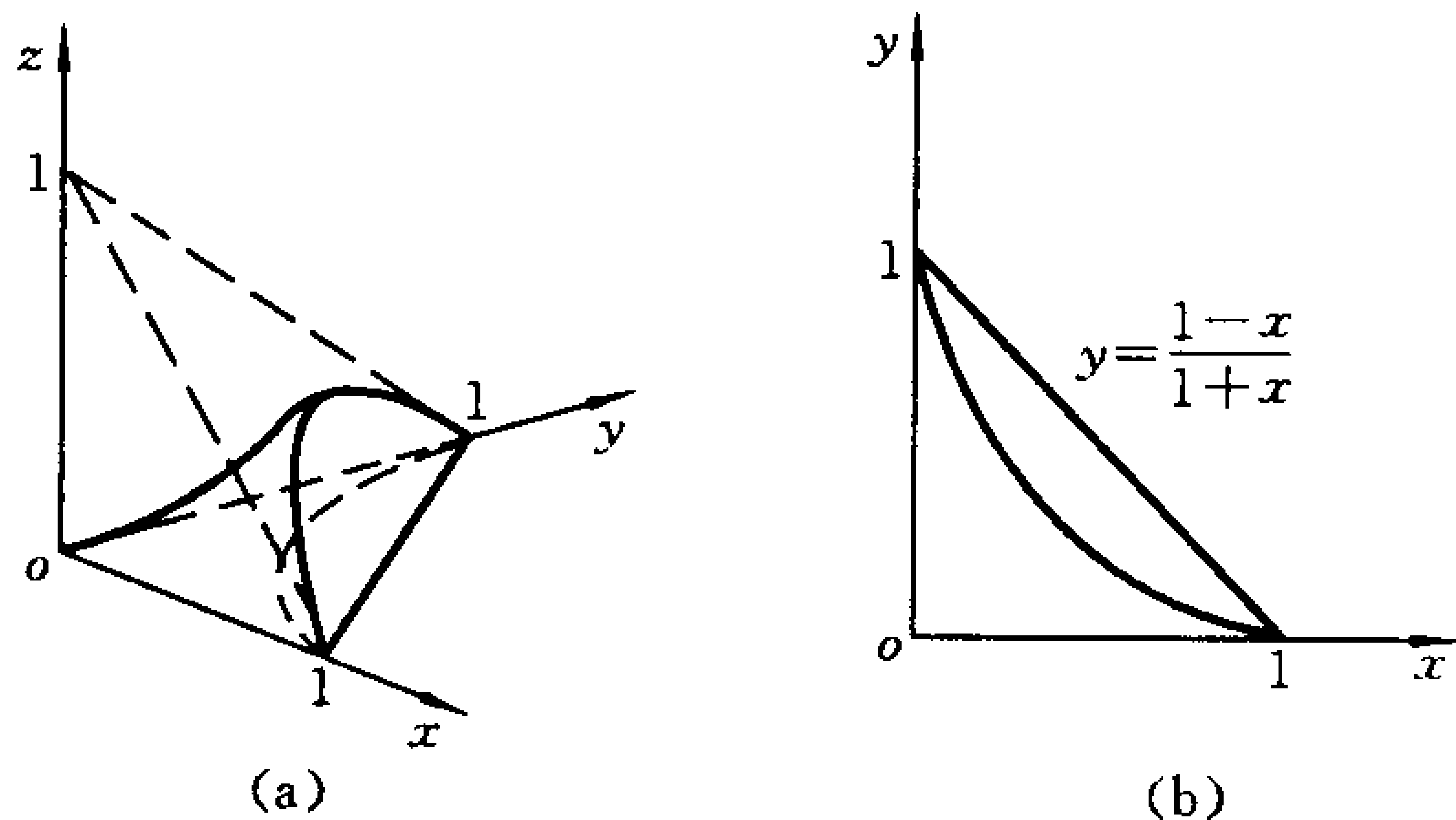


图 13.24

$$= abc\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/\sqrt{2}} r\left[\frac{1}{2} + r(\cos\theta + \sin\theta) + r^2\right] dr$$

$$= abc\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{6\sqrt{2}}(\cos\theta + \sin\theta) + \frac{1}{16}\right] d\theta$$

$$= abc \cdot \frac{6\pi}{16} = \frac{3}{8}\pi abc.$$

(3) 用广义极坐标 $x=ar\cos\theta, b=br\sin\theta$，则 $z=c(1-r^2)$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，$0\leqslant r\leqslant 1$；$|J|=abr$. 于是

$$V=\iint_D c\left[1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2\right] dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 abcr(1-r^4) dr$$

$$= 2\pi abc\int_0^1 (r-r^5) dr = \frac{2}{3}\pi abc.$$

例 5 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 截下部分的曲面面积.

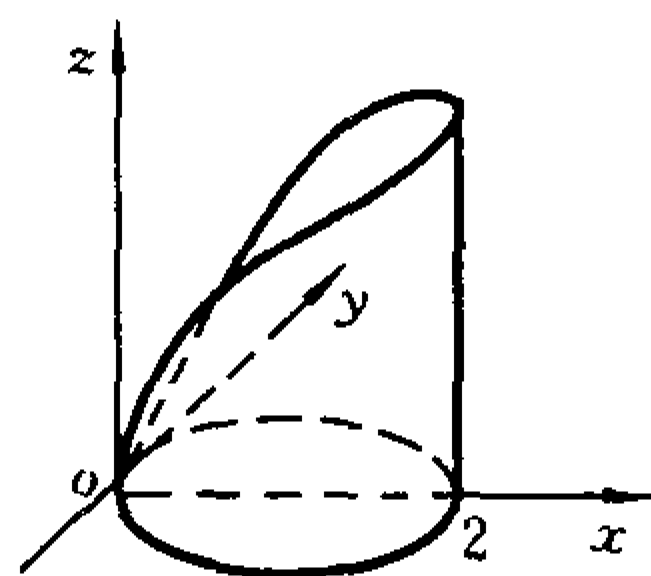


图 13.25

解 如图 13.25 所示，因为 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，所以 $\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}=\sqrt{2}$，$D: x^2+y^2\leqslant 2x$，于是

$$S=\iint_D \sqrt{2}\, dx dy = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r dr$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} 4\cos^2\theta d\theta = \sqrt{2}\pi.$$

也可由 $\iint_D dx dy = \pi$ 直接得到 $S=\sqrt{2}\pi$.

例 6 计算下列曲面的面积：

(1) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 包含在柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b\leqslant a)$ 内的部分；

(2) 球面 $z=\sqrt{x^2-y^2}$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 内的部分.

解 (1) $f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, $D:0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. 于是,由对称性得

$$S=2\cdot 4\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}y$$

$$=8a\int_0^a\left[\arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=8a^2\arcsin(b/a).$$

(2) $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$, $\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}=\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-y^2}}$. D 为 $r^2\leqslant a^2\cos 2\theta$. 于是,由对称性得

$$S=\iint_D\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}\sqrt{2}r\frac{r\cos\theta}{r\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}r$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}a^2\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=2a^2\int_0^{\pi/4}\sqrt{1-2\sin^2\theta}\mathrm{d}(\sqrt{2}\sin\theta)$$

$$=2a^2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\sqrt{1-2\sin^2\theta}+\frac{1}{2}\arcsin(\sqrt{2}\sin\theta)\right]\Bigg|_0^{\pi/4}$$

$$=\pi a^2/2.$$

二、重积分的物理应用

物理应用的类型比较多,解题时要详细审题,明确条件和要求后再动手.

例 7 形如曲面 $x^2+y^2=z^2$ 的漏斗中装了深为 H 的液体,设漏斗中任一点 $M(x,y,z)$ 处液体密度为 $\frac{1}{a^2+x^2+y^2}$, $a>0$. 求漏斗中液体的质量 m.

解 $V:0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, r\leqslant z\leqslant H, 0\leqslant r\leqslant H$. 于是

$$m=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^H r\mathrm{d}r\int_r^H\frac{\mathrm{d}z}{a^2+r^2}=2\pi\int_0^H\frac{Hr-r^2}{a^2+r^2}\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^H\frac{Hr-(a^2+r^2)+a^2}{a^2+r^2}\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\left[\frac{H}{2}\ln(a^2+r^2)-r+\arctan\frac{r}{a}\right]\Bigg|_0^H$$

$$=\pi[H\ln(a^2+H^2)-2H(1+\ln a)+2\arctan(H/a)].$$

例 8 设球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2x$ 的密度等于它到坐标原点的距离，求球体的质量 m.

解 积分域如图 13.26 所示，则

$$m=\iiint\limits_V\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\quad(\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\pi\cdot 4\int_0^{\pi}\cos^4\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=4\pi\left(-\frac{1}{5}\cos^5\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{8}{5}\pi.$$

例 9 求下列曲线所围成的均匀薄板的质心坐标：

(1) $ay=x^2, x+y=2a\ (a>0)$；

(2) $r=a\cos\theta, r=b\cos\theta\ (0<a<b)$；

(3) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi, a>0)$，$x$ 轴.

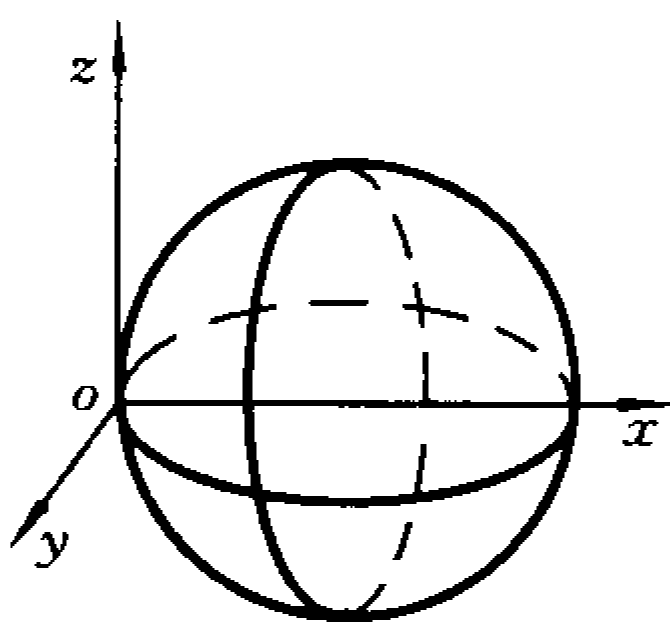


图 13.26

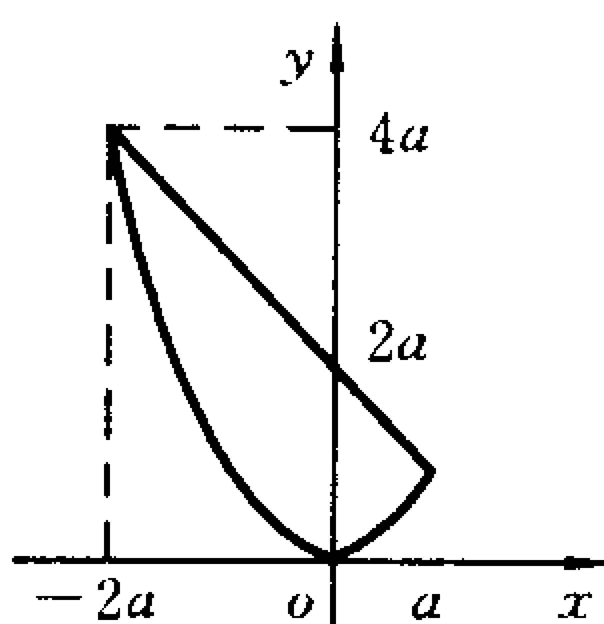


图 13.27

解 (1) 积分域如图 13.27 所示，设密度 $=\rho$，有

$$m=\int_{-2a}^{a}\mathrm{d}x\int_{x^2/a}^{2a-x}\rho\mathrm{d}y=\int_{-2a}^{a}\rho\left(2a-x-\frac{x^2}{a}\right)\mathrm{d}x=\frac{9}{2}\rho a^2,$$

$$m_y=\int_{-2a}^{a}\mathrm{d}x\int_{x^2/a}^{2a-x}\rho x\mathrm{d}y=\int_{-2a}^{a}\rho\left(2a-x-\frac{x^3}{a}\right)\mathrm{d}x=-\frac{9}{4}\rho a^3,$$

$$m_x=\int_{-2a}^{a}\mathrm{d}x\int_{x^2/a}^{2a-x}\rho y\mathrm{d}y=\int_{-2a}^{a}\frac{\rho}{2}\left[(2a-x)^2-\frac{x^4}{a^2}\right]\mathrm{d}x=\frac{36}{5}\rho a^3.$$

故 $\bar{x}=\frac{m_y}{m}=-\frac{a}{2}$, $\bar{y}=\frac{m_x}{m}=\frac{8}{5}a$, $(\bar{x},\bar{y})=\left(-\frac{a}{2},\frac{8}{5}a\right)$.

（2）由对称性知，$\bar{y}=0$. 有

$$m=2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta}\rho r\mathrm{d}r=\rho\int_0^{\pi/2}(b^2-a^2)\cos^2\theta\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{\pi\rho}{4}(b^2-a^2),$$
$$m_y=2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta}\rho r^2\cos\theta\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\rho\int_0^{\pi/2}(b^3-a^3)\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{2}{3}\rho(b^3-a^3)\cdot\frac{3}{4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi\rho}{8}(b^3-a^3).$$

故 $\bar{x}=\frac{m_y}{m}=\frac{a^2+ab+b^2}{2(a+b)}$, $(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{a^2+ab+b^2}{2(a+b)},0\right)$.

（3）D 是摆线一拱与 x 轴所围成的图形：$0\leqslant x\leqslant 2\pi a$，$0\leqslant y\leqslant y$. 由对称性知，$\bar{x}=\pi a$.

$$m=\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{y}\rho\mathrm{d}y=\rho\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=3\pi\rho a^2,$$
$$m_x=\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{y}\rho y^2\mathrm{d}y=\frac{\rho}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3a^3\mathrm{d}t=\frac{5}{2}\pi\rho a^3.$$

故 $\bar{y}=\frac{m_x}{m}=\frac{5}{6}a$, $(\bar{x},\bar{y})=\left(\pi a,\frac{5}{6}a\right)$.

注意 当 $0\leqslant x\leqslant 2\pi a$ 时，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，$x,y$ 均应用参数式表示.

例 10 求曲面 $z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$，$x^2+y^2=2az$ $(a>0)$ 所围成的均匀立体的质心坐标.

解 V 由上半球面与旋转抛物面所围成，由区域对称性知，$\bar{x}=0$，$\bar{y}=0$，于是

$$m=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}a}r\mathrm{d}r\int_{r^2/(2a)}^{\sqrt{3a^2-r^2}}\rho\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\rho\int_0^{\sqrt{2}a}\left[\sqrt{3a^2-r^2}-\frac{r^2}{2a}\right]r\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\rho\left[-\frac{1}{3}(3a^2 - r^2)^{3/2} - \frac{r^4}{8a}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{2}a}$$

$$= 2\pi\rho\left(\sqrt{3} - 5/6\right)a^2,$$

$$m_{xy} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}a} r\mathrm{d}r\int_{r^2/(2a)}^{\sqrt{3a^2-r^2}} \rho z\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\rho\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{1}{2}\left(3a^2 - r^2 - \frac{r^4}{4a^2}\right)r\mathrm{d}r = \frac{5}{3}\pi\rho a^4.$$

故 $\bar{z} = \dfrac{m_{xy}}{m} = \dfrac{5a}{6\sqrt{3} - 5}$, $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(0,0,\dfrac{5a}{6\sqrt{3} - 5}\right)$.

例 11 (1) 求 $y=x^2$ 与 $y=1$ 所围成的薄片对直线 $y=-1$ 的转动惯量;

(2) 求密度 $\rho=1$ 的由 $x^2+y^2+z^2=3(x+2y+3z)-10$ 所围成的均匀物体对直线 l:$2x+1=z,y=4$ 的转动惯量;

(3) 由 $y=\ln x, y=0, x=\mathrm{e}$ 所围成的均匀薄板绕直线 $x=l$ 旋转时转动惯量最小,求 l.

解 (1) 设想将 x 轴向上平移距离 1,于是

$$I_{y=-1} = \iint\limits_{(D)}\rho(y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\rho\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}(y+1)^2\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\rho}{3}\int_{-1}^{1}[8 - (x^2+1)^3]\mathrm{d}x = \frac{368}{105}\rho.$$

(2) 曲面方程化为 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^3=4$,直线方程化为 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-4}{0}=\dfrac{z+1}{2}$. 可知,$l$ 过点 $(-1,4,-1)$,方向向量 $s=(1,0,2)$. 球心为 $(1,2,3)$,半径为 2. 球心到直线的距离 $d=\dfrac{|(2,-2,4)\times(1,0,2)|}{|(1,0,2)|}=2$,其中 $(2,-2,4)$ 表示点 $(-1,4,-1)$ 到球心 $(1,2,3)$ 的向量.

因为转动惯量仅与物体形状、大小、密度及物体与轴的相对位置有关,故设球体为

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leqslant 4,$$

l 为 x 轴或 y 轴，球体半径仍为 2，于是

$$I=I_x=I_y=\frac{1}{2}(I_x+I_y)=\frac{1}{2}\iiint\limits_V(x^2+y^2+2z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}(1+\cos^2\varphi)r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=\pi\int_0^{\pi/2}(1+\cos^2\varphi)\sin\varphi\int_0^{4\cos\varphi}r^4\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1024}{5}\pi\int_0^{\pi/2}(\cos^5\varphi+\cos^7\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{896}{15}\pi.$$

(3) $$I(l)=\iint\limits_D(x-l)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}(x-l)^2\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^{\mathrm{e}}(x-l)^2\ln x\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{分部积分}}\frac{1}{3}\Big[\ln x\cdot(x-l)^3-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2l-3xl^2-\ln x\cdot l^3\right)\Big]\Big|_1^{\mathrm{e}}$$

$$=l^2-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2+1)l+\frac{2}{9}\mathrm{e}^3+\frac{1}{9}.$$

讨论极值，因为

$$I'(l)=2l-(\mathrm{e}^2+1)/2,$$

令 $I'(l)=0$，则 $$l=(\mathrm{e}^2+1)/4.$$

又 $I''(l)=2>0$，故 $l=(\mathrm{e}^2+1)/4$ 为极小值点.

例 12 求由 $y=1-x$，$y=1$，$x=1$ 所围成的、密度为 $\rho(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的薄板对位于坐标原点、质量为 m 的质点的引力.

解 这是一个平面引力问题.

$$F_x=mg\iint\limits_D\frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=mg\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-y}^1\frac{x}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x$$

$$= mg\int_0^1\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\right)\Big|_{1-y}^{1}\mathrm{d}y = -\pi mg/2.$$

由对称性知 $\quad F_y=-\pi mg/2.$

故 $$\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}=-\frac{1}{2}\pi mg(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}).$$

例 13 求密度为 ρ 的均匀柱体：$x^2+y^2\leqslant R^2, 0\leqslant z\leqslant h$ 对位于点 $M_0(0,0,a)$ $(a>h)$的、单位质量质点的引力.

解 由柱体对称性知，$F_x=F_y=0$，而

$$F_z=\iiint_{\Pi}k\rho\frac{a-z}{[x^2+y^2+(a-z)^2]^{3/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \text{ (}k\text{ 为常数)}$$

$$= k\rho\int_0^h(a-z)\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{[r^2+(a-z)^2]^{3/2}}$$

$$= 2\pi k\rho\int_0^h(a-z)\left[\frac{1}{a-z}-\frac{1}{\sqrt{R^2+(a-z)^2}}\right]\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi k\rho\int_0^h\left[1-\frac{a-z}{\sqrt{R^2+(a-z)^2}}\right]\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi k\rho[h+\sqrt{R^2+(a-h)^2}-\sqrt{R^2+a^2}].$$

例 14 形状为 $x^2+y^2\leqslant z^2\leqslant 1$ 的均匀物体放在水平的桌面上，当物体静止时，物体的轴线与桌面的夹角 θ 是多大?

解 图 13.28(a)表示物体处于不稳平衡状态；图 13.28(b)表示物体处于平衡状态，此时重心线通过桌面与物体切点，切线的法线过物体的重心.

先求重心坐标，由对称性知，$\bar{x}=\bar{y}=0$，而

$$m=\iiint_V\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1\mathrm{d}z=2\pi\int_0^1 r(1-r^2)\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2},$$

$$m_z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1 z\mathrm{d}z=2\pi\int_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{r^4}{2}\right)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{3}.$$

故 $\bar{z}=2/3$，重心坐标$(0,0,2/3)$.

为简单计，在 yoz 平面上考虑角 θ. 设切点为$(0,y_0,z_0)$，物体边界线为 $z=y^2$，则过点(y_0,z_0)的切线斜率为 $2y_0$，法线斜率为

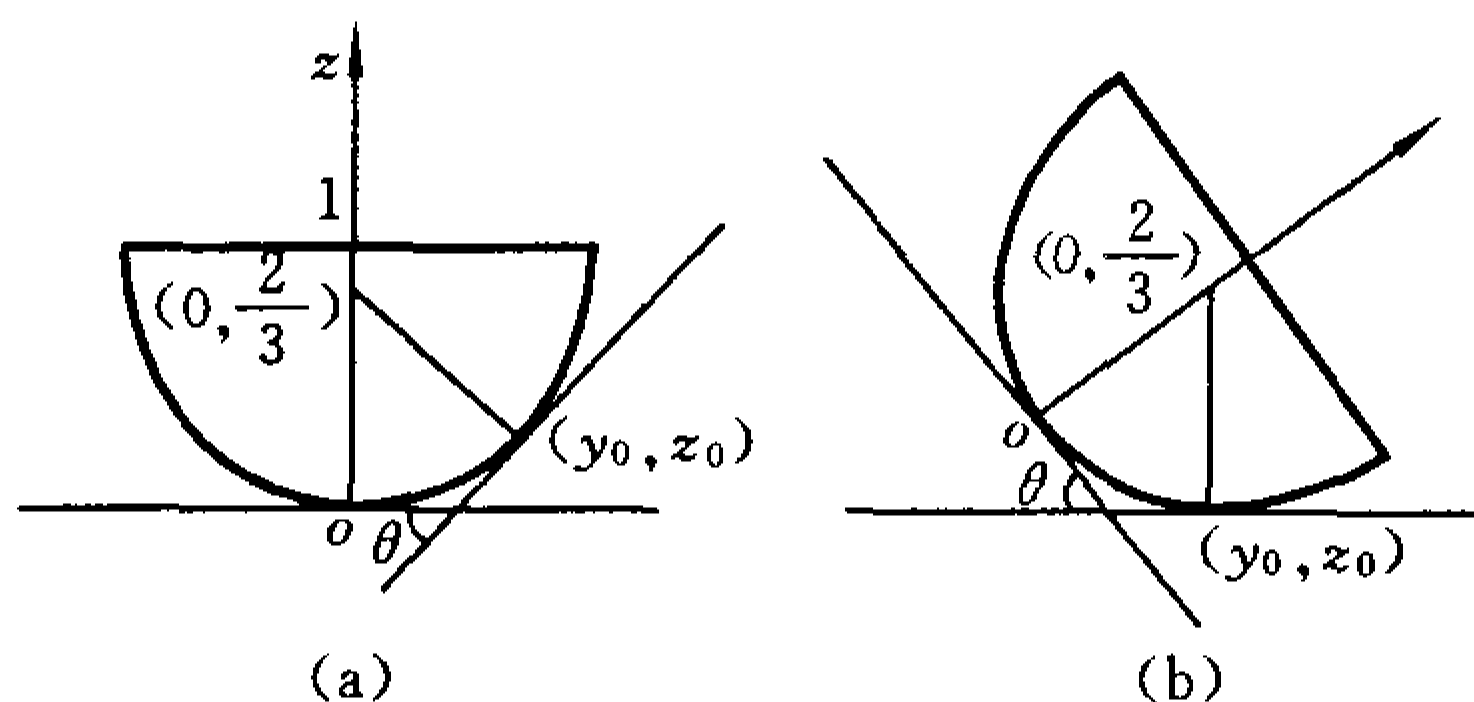


图 13.28

$-1/(2y_0)$. 法线方程为 $z-z_0=-(y-y_0)/(2y_0)$. 由于重心在法线上，将 $(0,2/3)$ 代入，解得 $z_0=1/6, y_0=1/\sqrt{6}$. 所以

$$\tan\theta=\frac{2/3-z_0}{z_0}=\frac{\sqrt{6}}{2}\Rightarrow\theta=\arctan\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

例 15 设一高度为 $h(t)$（t 为时间）的雪堆在融化中，雪堆侧面满足方程 $z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$（长度单位厘米，时间单位小时）. 已知体积减小的速率与侧面积成正比（比例系数 0.9），问：高为 130 厘米的雪堆全部融化需多少小时？

解 以 V 记雪堆体积，S 记侧面积，则

$$V=\int_0^{h(t)}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2}[h^2(t)-h(t)z]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{h(t)}\frac{\pi}{2}[h^2(t)-h(t)z]\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}h^3(t).$$

$$S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{h^2(t)}{2}}\sqrt{1+16(x^2+y^2)/h^2(t)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{h(t)/\sqrt{2}}[h^2(t)+16r^2]^{1/2}r\mathrm{d}r=\frac{13}{12}\pi h^2(t).$$

由题设知$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-0.9S$，即

$$\frac{3}{4}\pi h^2(t)h'(t)=-\frac{9}{10}\cdot\frac{13}{12}\pi h^2(t),$$

得
$$h'(t)=-\frac{13}{10}\Rightarrow h(t)=-\frac{13}{10}t+c.$$

由于$h(0)=130$，故$c=130\Rightarrow h(t)=-\frac{13}{10}t+130$.

令$h(t)\to 0$，得$t=100$(小时)，即高130厘米的雪堆全部融化要100小时.

第五节　含参变量的非正常积分

主要内容

一、含参变量的非正常积分

1. 设函数f在无界区域

$$E=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant y<+\infty\}$$

上，$\forall$ 固定的$x\in[a,b]$，非正常积分$\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$都收敛，则其值是$x$的函数，记作

$$I(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y,\quad x\in[a,b].$$

$I(x)$称为定义在$[a,b]$上的含参变量的非正常积分.

2. $\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$与函数$I(x)\forall\ \varepsilon>0,\exists\ c<N\in\mathbf{R}$，使得当$M>N$时，$\forall\ x\in[a,b]$，都有

$$\left|\int_c^M f(x,y)\mathrm{d}y-I(x)\right|<\varepsilon,\quad 即\quad\left|\int_M^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon,$$

则称非正常积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 一致收敛于 $I(x)$.

3. 一致收敛的柯西准则　含参变量的非正常积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛的充要条件是：$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ c < M \in \mathbf{R}$，使得当 $A_1, A_2 > M$ 时，对一切 $x \in [a,b]$，都有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right| < \varepsilon.$$

4. 含参变量非正常积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛的充要条件是：$\forall$ 递增数列 $\{A_n\} \to +\infty\ (A_1 = c)$，函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛.

5. 维尔斯特拉斯判别法（M 判别法）　设有函数 $g(y)$，使得

$$|f(x,y)| \leqslant g(y), a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y < +\infty.$$

若 $\int_c^{+\infty} g(y)\mathrm{d}y$ 收敛，则 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

6. 连续性　设 f 在 $[a,b]\times[c,+\infty]$ 上连续，若 $I(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

7. 可微性　设 f 和 f_x 在 $[a,b]\times[c,+\infty]$ 上连续，若 $I(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上收敛，$\int_c^{+\infty} f_x(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且

$$I'(x) = \int_c^{+\infty} f(x)(x,y)\mathrm{d}y.$$

8. 可积性　设 f 在 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 上连续，若 $I(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

设 $f(x,y)$ 在$[a,+\infty)\times[c,+\infty)$ 上连续.

(1) 若$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 y 在任何$[c,d]$ 上一致收敛，则 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 x 在任何$[a,b]$ 上一致收敛；

(2) 设$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y$ 或$\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}x$ 中有一个收敛，则

$$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

9. 设 f 在区域 $R=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$ 上有定义，对 x 的某些值，$y=d$ 是函数 f 的瑕点，则称$\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 为含参变量非正常积分(无界函数).

10. 若 $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>d-c\ (\delta>0)$，使得当 $0<\eta<\delta$ 时，$\forall\ x\in[a,b]$，都有$\left|\int_{d-\eta}^d f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon$，则称含参变量非正常积分 $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$ 上一致收敛.

对$\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$，有类似以上第 3 ～ 8 条的条件与性质成立.

二、欧拉积分

1. Γ 函数　$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x,s>0$，

B 函数　$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x,p>0,q>0.$

Γ 函数和 B 函数统称欧拉积分.

2. $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=I(s)+J(s)$. 其中 $I(s)$ 当 $0<s<1$ 时是收敛的无界函数非正常积分，$J(s)$ 当 $s>0$ 时是收敛的无穷限非正常积分.

(1) $\Gamma(s)$ 在定义域 $s>0$ 内连续且可导；

(2) $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),\Gamma(m+1)=n!,\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$；

(3) $\Gamma(s)$ 图形位于 s 轴上方，图形是凸的，在(1,2) 间有极小值点.

令 $x = y^2$，则 $\Gamma(s) = 2\int_0^{+\infty} y^{2s-1}e^{-y^2}dy\ (s > 0)$.

令 $x = py$，则 $\Gamma(s) = p^s\int_0^{+\infty} y^{s-1}e^{-sy}dy\ (s > 0, p > 0)$.

3. $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, p > 0, q > 0$ 在定义域内连续.

(1) 具有对称性，$B(p,q) = B(q,p)$；

(2) $B(p,q) = \dfrac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)\ (p > 0, q > 1)$；

$$B(p,q) = \frac{(p-1)(q-1)}{(p+q-1)(p+q-2)}B(p-1,q-1)$$
$$(p > 1, q > 1)；$$

(3) 令 $x = \cos^2\varphi$，则 $B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2}\sin^{2q-1}\varphi\cos^{2p-1}\varphi\,d\varphi$.

令 $x = \dfrac{1}{1+y}$，则 $B(p,q) = \int_0^{+\infty}\dfrac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy$.

4. $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\ (p > 0, q > 0)$，当 $p + q = 1$ 时，有余元公式

$$B(p,1-p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

疑难解析

1. 含参变量的非正常积分与一般非正常积分有何不同?

答 一般非正常积分收敛时是一个数量，而含参变量的非正常积分是参变量的函数. 因为是函数，所以它就存在在区域上收敛或一致收敛、连续、求导等问题；因为参变量的存在，所以还存在极限与积分交换顺序、求导与积分交换顺序以及二重积分交换顺序

等问题.解题时要认真对待,仔细考察.

方法、技巧与典型例题分析

利用定义、充要条件和魏尔斯特拉斯判别法确定含参变量非正常积分收敛与一致收敛时,最重要的是认真审验条件,指出什么情形下不符合条件,然后再进行判断.

例 1 讨论下列含参变量非正常积分在指定区间内的一致收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{y}\mathrm{d}y,[\delta,+\infty),(\delta>0)$ 与 $(0,+\infty)$;

(2) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-yx}\sin x\mathrm{d}x,\ (0<y_0\leqslant y<+\infty)$;

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(xy)}{1+x^2}\mathrm{d}x,\ (-\infty<y<+\infty)$;

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^p}\mathrm{d}x,(-1,1)$.

解 (1) 作代换 $u=xy$,则

$$\int_A^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{y}\mathrm{d}y=\int_{Ax}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\ (A>0),$$

由上册知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$ 收敛,故 $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ M>0$,当 $A'>M$ 时,有

$$\left|\int_{A'}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right|<\varepsilon.$$

取 $A\delta>M$,则当 $A>M/\delta$ 时,$\forall\ x\geqslant\delta>0$,有

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{y}\mathrm{d}y\right|<\varepsilon,$$

故 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{y}\mathrm{d}y$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛 $(\delta>0)$.

又由 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$ 收敛,$\forall\ \varepsilon_0>0$ 与 $M>0,\exists\ x>0$.使得

$$\left|\int_{M_x}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u-\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right|<\varepsilon_0,$$

即 $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u-\varepsilon_0<\int_{M_x}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u<\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u+\varepsilon_0,$$

令 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$，则由上式得

$$\int_M^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{y}\mathrm{d}y=\int_{M_x}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u>2\varepsilon_0-\varepsilon_0=\varepsilon_0.$$

故知$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{y}\mathrm{d}y$ 在$(0,+\infty)$内不一致收敛.

(2) 因为当 $0<y_0\leqslant y<+\infty$ 时，$|\mathrm{e}^{-yx}\sin x|\leqslant \mathrm{e}^{-y_0x}$，而$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y_0x}\mathrm{d}x=-1/y_0$ 收敛，所以依 M 判别法知，$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-yx}\sin x\mathrm{d}x$ 在$(0<y_0\leqslant y<+\infty)$内一致收敛.

(3) 因为$\left|\frac{\cos(xy)}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^2}$，而$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\pi$ 收敛，所以依 M 判别法知，$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(xy)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 在$(-\infty<y<+\infty)$内一致收敛.

(4) 因为$\frac{\cos x^2}{x^p}$在 $x=0$ 无界，所以将积分写为

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^p}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\cos x^2}{x^p}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^p}\mathrm{d}x=I_1+I_2.$$

对于 I_1，因$\left|\frac{\cos x^2}{x^p}\right|\leqslant\frac{1}{x^p}\leqslant\frac{1}{x^{p_1}}$ $(0<x\leqslant 1,p_0\leqslant p\leqslant p_1)$，而$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^{p_1}}$ 收敛，故依 M 判别法知，$\int_0^1\frac{\cos x^2}{x^p}\mathrm{d}x$ 在$[p_0,p_1]$上一致收敛.

对于 I_2，因$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{(p+1)/2}}\mathrm{d}t$，而

$$\left|\int_1^A\cos t\mathrm{d}t\right|=|\sin A-\sin 1|\leqslant 2,\quad 1\leqslant A\leqslant+\infty,$$

故一致有界，而$\frac{1}{t^{(p+1)/2}}$关于 t 单调减少，且关于 $p\in[p_0,p_1]$一致趋向于零. 依狄利克雷判别法知，$\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{(p+1)/2}}\mathrm{d}t$ 在$[p_0,p_1]$内一致收敛.

综上所述知，$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^p}\mathrm{d}x$ 在$(-1,1)$内闭一致收敛.

例 2 讨论下列含参变量非正常积分在指定区间上的一致收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-yx}\mathrm{d}x, 0\leqslant y\leqslant 1$； (2) $\int_1^{+\infty} x^y\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x, a\leqslant y\leqslant b$；

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{y}{(x+y)^2}\mathrm{d}x, 0\leqslant y\leqslant +\infty$.

解 (1) 设 $\varepsilon_0=1/3>0, \forall A>0, \exists A_0>A$ 和 $y_0=1/A_0\in[0,1]$，使得

$$\left|\int_{A_0}^{+\infty} y_0\mathrm{e}^{-y_0x}\mathrm{d}x\right| = \mathrm{e}^{-y_0A_0} = \mathrm{e}^{-1} > \frac{1}{3} = \varepsilon_0,$$

所以$\int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-yx}\mathrm{d}x$ 在$[0,1]$不一致收敛.

(2) 当 $a\leqslant y\leqslant b$ $(x>1)$ 时，$0<x^y\mathrm{e}^{-x}\leqslant x^b\mathrm{e}^{-x}$，而

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot x^b\mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^b+2}{\mathrm{e}^x} = 2,$$

故$\int_1^{+\infty} x^b\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛. 依 M 判别法知，$\int_1^{+\infty} x^y\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 在$[a,b]$上一致收敛.

(3) 设 $\varepsilon_0=1/3>0, \forall A>0, \exists A_0>A$ 和 $y_0=A_0\in(0,+\infty)$，使得

$$\left|\int_{A_0}^{+\infty}\frac{y_0}{(x+y_0)^2}\mathrm{d}x\right| = \frac{y_0}{A_0+y_0} = \frac{A_0}{A_0+A_0} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0,$$

所以$\int_1^{+\infty}\frac{y}{(x+y)^2}\mathrm{d}x$ 在$(0,+\infty)$不一致收敛.

例 3 计算下列积分：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-\mathrm{e}^{-\beta x^2}}{x}\mathrm{d}x$ $(\alpha>0,\beta>0)$；

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}-\mathrm{e}^{-\beta x}}{x}\mathrm{d}x$ $(\alpha>0,\beta>0)$.

解 此例用逐次积分法求解比较简单.

(1) 设 $\alpha>\beta$，$\dfrac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}=\int_\alpha^\beta xe^{-yx^2}dy$. 因为 $0\leqslant xe^{-yx^2}\leqslant xe^{-\alpha x^2}(\alpha\leqslant y\leqslant\beta)$，而 $\int_0^{+\infty}xe^{-\alpha x^2}dx$ 收敛，故 $\int_0^{+\infty}xe^{-yx^2}dx$ 在 $y\in[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，所以可以交换积分次序，即

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{+\infty}dx\int_\alpha^\beta xe^{-yx^2}dy=\int_\alpha^\beta dy\int_0^{+\infty}xe^{-yx^2}dx\\&=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2y}dy=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}.\end{aligned}$$

(2) 设 $\alpha<\beta$，$\dfrac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{2}=\int_\alpha^\beta e^{-xy}dy$. 因为 $0\leqslant e^{-xy}\leqslant e^{-\alpha x}$，而 $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}dx$ 收敛，故 $\int_0^{+\infty}e^{-yx}dx$ 在 $y\in[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，所以可以交换积分次序，即

$$I=\int_0^{+\infty}dx\int_\alpha^\beta e^{-xy}dy=\int_\alpha^b dy\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx=\int_\alpha^\beta\frac{1}{y}dy=\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

计算含参变量非正常积分，可用对参数的积分法、微分法和公式法进行，具体使用时要根据具体情况选择尽可能简单的方法. 但要注意，每一过程都要合理，方能避免出错.

例 4 证明付茹兰公式　设 $f(x)$ 为连续函数，且积分 $\int_A^{+\infty}\dfrac{f(x)}{x}dx$ 对任何的 $A>0$ 都有意义，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}\ (a>0,b>0).$$

证　$\forall A>0$，有

$$\begin{aligned}I&=\lim_{A\to0^+}\int_A^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx\\&=\lim_{A\to0^+}\int_A^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}dx-\lim_{A\to0^+}\int_A^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}dx\\&\xlongequal{ax,bx=t}\lim_{Aa\to0^+}\int_{Aa}^{+\infty}f(t)\frac{dt}{t}-\lim_{Ab\to0^+}\int_{Ab}^{+\infty}f(t)\frac{dt}{t}\end{aligned}$$

$$= \lim_{\substack{Aa\to 0^+\\ Ab\to 0^+}} \int_{Aa}^{Ab} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t = \lim_{\substack{Aa\to 0^+\\ Ab\to 0^+}} f(\xi) \int_{Aa}^{Ab} \frac{\mathrm{d}t}{t} \ (Aa < \xi < Ab)$$

$$= \lim_{\substack{Aa\to 0^+\\ Ab\to 0^+}} f(\xi) \ln \frac{b}{a} = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

利用这个公式即可得出例 3(2)的结果，只需令 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$.

例 5 利用付茹兰公式，计算：

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} \mathrm{d}x \ (a > 0. b > 0)$;

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x} \mathrm{d}x \ (a > 0. b > 0)$.

解 (1) 设 $f(x) = \cos x$，则 $f(x)$ 在$[0, +\infty)$连续，且 $\forall A > 0$，$\int_A^{+\infty} \frac{\cos x}{x} \mathrm{d}x$ 收敛，依付茹兰公式，有

$$I = f(0) \ln \frac{b}{a} = \cos 0 \cdot \ln \frac{b}{a} = \ln \frac{b}{a}.$$

(2) 设 $f(x) = \pi/2 - \arctan x$，则 $f(x)$ 在$[0, +\infty)$连续，且 $\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi/2 - \arctan x}{1/x} \overset{L'}{=\!=\!=} 1$，故 $\forall A > 0$，积分 $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x$ 收敛，依付茹兰公式，有

$$I = - f(0) \ln \frac{b}{a} = \frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}.$$

注意 $f(ax) - f(bx) = \arctan bx - \arctan ax$.

例 6 计算 $I(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos 2xt \mathrm{d}t$.

解 记 $f(x) = \mathrm{e}^{-t^2} \cos 2xt$，则 $f_x' = - 2t\mathrm{e}^{-t^2} \sin 2xt$，且

$$|f_x(x,t)| \leqslant 2t\mathrm{e}^{-t^2}, -\infty < x < +\infty, 0 \leqslant t \leqslant +\infty.$$

而 $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$ 收敛，依 M 判别法知，$\int_0^{+\infty} f_x(x,t) \mathrm{d}t$ 关于 $x \in \mathbf{R}$ 一致收敛. 应用积分号下求导定理，得

$$I'(x) = - 2\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2} \sin 2xt \mathrm{d}t$$

$$= e^{-t^2}\sin 2xt\Big|_0^{+\infty} - 2x\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos 2xt\mathrm{d}t = -2xI(x),$$

即 $I'(x)/I(x) = -2x$. 积分得 $I(x) = ce^{-x^2}$, 由 $I(0) = \sqrt{\pi}/2$, 得 $c = \sqrt{\pi}/2$, 故

$$I(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2},\ -\infty < x < +\infty.$$

例 7 确定 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 的连续范围.

解 $x = 0$ 可能为瑕点, 将 $I(\alpha)$ 改写为

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}\mathrm{d}x = I_1(\alpha) + I_2(\alpha).$$

当 $x \to 0^+$ 时, $\frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-3}}$, 故当 $\alpha < 4$ 时 $I_1(\alpha)$ 收敛; 而当 $\alpha > 1$ 时, $I_2(\alpha)$ 收敛. 故 $I(\alpha)$ 定义域为 $(1,4)$.

$\forall\ [a,b] \subset (1,4)$, 当 $0 \leqslant x \leqslant 1, a \leqslant \alpha \leqslant b < 4$ 时, 有

$$\left|\frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}\right| = \frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha} \leqslant \frac{\ln(1+x^3)}{x^b},$$

且 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^3)}{x^b}\mathrm{d}x$ 收敛, 依 M 判别法知, $I_1(\alpha)$ 关于 $\alpha \in [a,b]$ 一致收敛. 故 $I_1(\alpha)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

$\forall\ [a,b] \subset (1,4)$, 当 $1 \leqslant x < +\infty, 1 \leqslant a \leqslant \alpha \leqslant b$ 时, 有

$$\left|\frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}\right| = \frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha} \leqslant \frac{\ln(1+x^3)}{x^a},$$

且 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^a}\mathrm{d}x$ 收敛, 依 M 判别法知, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha \in [a,b]$ 一致收敛, 故 $I_a(\alpha)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

综上所述知, $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 上连续.

例 8 证明: 若 $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ 收敛, 则 $\int_0^{+\infty} e^{-xy}f(x)\mathrm{d}x$ 在 $0 \leqslant y \leqslant \beta$ 上一致收敛.

证 设 $F(x)=\int_x^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$，则当 $x\to+\infty$ 时，$F(x)\to 0$. 当 $x>X_0$ 时，有 $|F(x)|<\varepsilon$，故对 $X'>X>X_0$ 及一切 $y\geqslant 0$ 有

$$\left|\int_X^{X'}f(x)\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x\right|=\left|F(x)\mathrm{e}^{-xy}-y\int_X^{X'}F(x)\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\varepsilon+\varepsilon+y\varepsilon\int_X^{X'}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x<3\varepsilon.$$

由柯西审敛准则知，$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}f(x)\mathrm{d}x$ 在 $0\leqslant y\leqslant\beta$ 上一致收敛.

例 9 利用 Γ 函数、B 函数计算下列积分：

(1) $\int_0^1\sqrt{x-x^2}\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$；

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$； (4) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

解 要找准适当的代换，将积分化为 Γ 函数或 B 函数.

(1) $$I=\int_0^1 x^{1/2}(1-x)^{1/2}\mathrm{d}x=\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{[\Gamma(3/2)]^2}{\Gamma(3)}=\frac{[\Gamma(1/2)/2]^2}{2!}=\frac{(\sqrt{\pi}/4)^2}{2}=\frac{\pi}{8}.$$

(2) $$I=a^4\int_0^a\left(\frac{x}{a}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}\frac{x}{a}$$

$$=a^4\int_0^1 u^2(1-u^2)^{1/2}\mathrm{d}u=\frac{a^4}{2}\int_0^1 u(1-u^2)^{1/2}\mathrm{d}u^2$$

$$=\frac{a^4}{2}\int_0^1 t^{1/2}(1-t)^{1/2}\mathrm{d}t=\frac{a^4}{2}\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{a^4}{2}\cdot\frac{\pi}{8}=\frac{\pi a^4}{16}.$$

(3) 设 $x^4=t$，则 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-1/4}}{1+t}\mathrm{d}t$，再令 $\frac{t}{1+t}=u$，得

$$I=\frac{1}{4}\int_0^1 u^{-1/4}(1-u)^{-3/4}\mathrm{d}u=\frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma(3/4)\Gamma(1/4)}{\Gamma(1)}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(4) 设$\frac{x}{1+x}=t \Rightarrow x=\frac{t}{1-t}, \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^2}$,则

$$I=\int_0^1 t^{1/4}(1-t)^{-1/4}\mathrm{d}t = \mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\Gamma(5/4)\Gamma(3/4)}{\Gamma(2)}$$

$$=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi/4)}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

例 10 证明瓦里士公式

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\mathrm{d}\theta=\begin{cases}\dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n=2m,\\ \dfrac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n=2m+1.\end{cases}$$

证 由主要内容二中的3(3)知

$$I_n=\frac{\Gamma[(n+1)/2]\Gamma(1/2)}{2\Gamma(n/2+1)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\Gamma(n/2+1)}.$$

当$n=2m$时,由递推公式得

$$I_{2m}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{(2m-1)!!/2^m\cdot\sqrt{\pi}}{m!}=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2};$$

当$n=2m+1$时,由递推公式得

$$I_{2n+1}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{m!}{(2m+1)!!/2^{m+1}\cdot\sqrt{\pi}}=\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

例 11 证明勒让德(Legendre)公式

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1}}\Gamma(2s).$$

证 由于

$$\mathrm{B}(s,s)=\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{s-1}\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{s-1}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{1/2}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{s-1}\mathrm{d}x,$$

作代换$1/2-x=\sqrt{t}/2$,得

$$\mathrm{B}(s,s)=\frac{1}{2^{2s-1}}\int_0^1(1-t)^{s-1}t^{-1/2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2^{2s-1}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},s\right).$$

由 Γ 函数与 B 函数关系式得

$$B(s,s) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(s)}{\Gamma(2s)} = \frac{1}{2^{2s-1}}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(s)}{\Gamma(s+1/2)} = \frac{1}{2^{2s-1}}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s)}{\Gamma(s+1/2)},$$

整理后即得所证结果.

例 12 计算 $\int_0^{\pi/2}\sin^6 x\cos^4 x\mathrm{d}x$.

解 设 $t=\sin x$，则 $I=\int_0^1 t^6(1-t^2)^{3/2}\mathrm{d}t$. 再作代换 $t=\sqrt{u}$，得

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{5/2}(1-u)^{3/2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(7/2)\Gamma(5/2)}{\Gamma(6)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5!}\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \frac{3\pi}{512}.$$

例 13 求下列积分的存在域：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x$.

解 (1) $I \xlongequal{\frac{x}{1+x}=t} \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-m-1}\mathrm{d}t = B(m,n-m)$，故存在域为 $m>0, n-m>0$，即 $n>m>0$.

(2) $I \xlongequal{\sin x = t} \int_0^1 t^m(1-t^2)^{(n-1)/2}\mathrm{d}t$

$$\xlongequal{t^2=m} \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{m-1}{2}}(1-u)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right),$$

故存在域为 $m>-1, n>-1$.

第十四章　曲线积分与曲面积分

第一节　第一型曲线积分与第一型曲面积分

主要内容

1. 设Ω是平面或空间的一个可度量的几何体,f定义在Ω上.对Ω作分割T,称$\|T\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{\mathrm{d}(\Omega_i)\}$为分割$T$的细度,$\forall\ P_i \in \Omega_i\ (i=1,2,\cdots,n)$.若极限$\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\Omega_i = J$,且$J$与分割$T$及点$P_i$取法无关,则称$f$在$\Omega$上可积,$J$为$f$在$\Omega$上的积分.记作$J=\int_\Omega f$.

若Ω为平面曲线或空间曲线L,则称J为f在L上的第一型曲线积分,记作$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$或$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s$,其中$\mathrm{d}s$为曲线$L$的弧微分.

若Ω为空间曲面块S,则称J为f在S上的第一型曲面积分,记作$\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$.

2. 第一型曲线积分与曲面积分的性质

(1) 若$f_i\ (i=1,2,\cdots,k)$在Ω上可积,c_i为常数,则

$$\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{k}c_i f_k = \sum_{i=1}^{k}\left(c_i\int_{\Omega}f_i\right).$$

(2) 若 Ω 可划分为相连接的小 Ω_i $(i=1,2,\cdots,k)$，则

$$\int_{\Omega}f = \sum_{i=1}^{k}\int_{\Omega_i}f.$$

(3) 若 f,g 在 Ω 上可积，且 $f(P)\leqslant g(P)$，则

$$\int_{\Omega}f \leqslant \int_{\Omega}g.$$

(4) 若 f 和 $|f|$ 都在 Ω 上可积，则

$$\left|\int_{\Omega}f\right| \leqslant \int_{\Omega}|f|.$$

(5) 若 f 在 Ω 上可积，则存在 $c\in[\inf\limits_{\Omega} f(P),\ \sup\limits_{\Omega} f(P)]$ 使得

$$\int_{\Omega}f = c\Delta\Omega.$$

3. 设有定义在光滑曲线 L 上的连续函数 f，且

$$L:\begin{cases}x=\phi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad t=[\alpha,\beta],$$

则 $$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{\alpha}^{\beta}f[\varphi(t),\psi(t)]\ \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

4. 设有定义在光滑面曲 S 上的连续函数 f，且

$$S:Z=Z(x,y),\quad (x,y)\in D,$$

则 $$\iint\limits_{S}f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D}f(x,y,z(x,y))\ \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

疑 难 解 析

1. 为什么第一型曲线积分定义中的 ds 为曲线 L 的弧微分？

答 由积分和的概念，第一型曲线积分为

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i.$$

由于 $\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\mathrm{d}t$（$t_i$ 是分割 T 的分点所对应的参数值），由定积分中值定理

$$\Delta s_i = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\Delta t_i,$$

故弧长 Δs 的近似值就用弧微分表示为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\mathrm{d}t,$$

从而与第一型曲线积分计算公式一致.

方法、技巧与典型例题分析

在计算第一型曲线积分时要注意，当曲线以不同形式方程给出时，$\mathrm{d}s$ 的表示形式不同；同时要注意利用曲线的对称性、方程形式的转换和定积分的方法与技巧，注意第一型曲面积分与二重积分的不同、曲面定义域的求取以及 $\mathrm{d}s$ 的转化，注意二重积分方法与技巧的利用.

一、第一型曲线积分的计算与应用

由于弧长一定是正值，故化为定积分后上限一定要大于下限，$\mathrm{d}s$ 的计算一定要正确.

例 1 计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L[(x+2)^2+(y-3)^2]\mathrm{d}s$，$L$ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+y+z=0$ 的交线 $(a>0)$；

(2) $\oint_L(2x^2+3y^2)\mathrm{d}s$，$L$ 为 $x^2+y^2=2(x+y)$；

(3) $\oint_L xy\mathrm{d}s$，L 为 $x=a\cos t, y=b\sin t\ (0\leqslant t\leqslant \pi/2)$；

解 (1) 由曲线的对称性，得

$$\oint_L x^2\mathrm{d}s = \oint_L y^2\mathrm{d}s = \oint_L z^2\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{3}\oint_L a^2\mathrm{d}s = \frac{1}{3}a^2\cdot 2\pi a = \frac{2}{3}\pi a^3,$$

$$\oint_L x\mathrm{d}s = \oint_L y\mathrm{d}s = \oint_L z\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_L (x+y+z)\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{3}\oint_L 0\mathrm{d}s = 0,$$

故

$$I = \oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s + \oint_L (4x-6y)\mathrm{d}s + 13\oint_L \mathrm{d}s$$

$$= 4\pi a^3/3 + 0 + 13\cdot 2\pi a = \pi a(4a^2/3 + 26).$$

(2) 令 $x=1+\sqrt{2}\cos t, y=1+\sqrt{2}\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，则 $\mathrm{d}s=\sqrt{2}\,\mathrm{d}t$，于是

$$I = \int_0^{2\pi}[10 + 2\sqrt{2}(2\cos t + 3\sin t) - \cos 2t]\sqrt{2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} 10\sqrt{2}\,\mathrm{d}t = 20\sqrt{2}\pi.$$

(3)

$$I = \int_0^{\pi/2} ab\cos t\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{ab}{2(a^2-b^2)}\int_0^{\pi/2}\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 t + b^2}\,\mathrm{d}[(a^2-b^2)\sin^2 t]$$

$$= \frac{ab}{2(a^2-b^2)}\cdot\frac{2}{3}[(a^2-b^2)\sin^2 t + b^2]^{3/2}\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}.$$

例 2 计算下列曲线积分：

(1) $\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，$L$ 由曲线 $r=a, \theta=0, \theta=\frac{\pi}{4}$ 所围成；

(2) $\int_L |y|\mathrm{d}s$，L 为双纽线 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ 的弧；

(3) $\int_L (x^{4/3}+y^{4/3})\mathrm{d}s$，$L$ 为内摆线 $x^{4/3}+y^{4/3}=a^{4/3}$ 的弧.

解 (1) L 由 $L_1: r=a, L_2: \theta=0, L_3: \theta=\pi/4$ 三组组成，可以求得 $\mathrm{d}s$ 分别为 $a\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}r, \mathrm{d}r$，于是

$$I = \int_0^{\pi/4}\mathrm{e}^a\mathrm{d}\theta + \int_0^a \mathrm{e}^r\mathrm{d}r + \int_0^a \mathrm{e}^3\mathrm{d}r = 2(\mathrm{e}^a - 1) + \frac{1}{4}\pi a\mathrm{e}^a.$$

(2) L 的极坐标方程为 $r^2=a^2\cos 2\theta, \mathrm{d}s=\dfrac{a\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$，由曲线的对称性，得

$$I = 4\int_0^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\theta}\cdot\sin\theta\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta = 2a^2(2-\sqrt{2}).$$

(3) $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y_x'^2}\mathrm{d}x=(a/x)^{1/3}\mathrm{d}x$，由对称性，得

$$\begin{aligned} I &= 4\int_0^a [x^{4/3}+(a^{2/3}-x^{2/3})^2](a/x)^{1/3}\mathrm{d}x \\ &= 4a^{1/3}\int_0^a (2x+a^{4/3}x^{-1/3}-2a^{2/3}x^{1/3})\mathrm{d}x = 4a^{7/3}. \end{aligned}$$

若令 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$，则 $\mathrm{d}s=3a\cos t\sin t\mathrm{d}t$，得

$$\begin{aligned} I &= 4\int_0^{\pi/2} a^{4/3}(\cos^4 t+\sin^4 t)3a\cos t\sin t\mathrm{d}t \\ &= 24a^{7/3}\int_0^{\pi/2}\sin^5 t\mathrm{d}\sin t = 4a^{7/3}. \end{aligned}$$

例 3 求空间曲线 $x=a\arcsin\dfrac{x}{a}, z=\dfrac{a}{4}\ln\dfrac{a-x}{a+x}$ 从 $o(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$ 的弧长.

解 $\mathrm{d}s=\dfrac{3a^2-2x^2}{2(a^2-x^2)}\mathrm{d}x$ $(|x_0|<a)$. 当 $x_0>0$ 时，有

$$I = \int_0^{x_0}\frac{3a^2-2x^2}{2(a^2-x^2)}\mathrm{d}x = \frac{a}{4}\ln\frac{a+x_0}{a-x_0}-x_0 = |z_0|+|x_0|;$$

当 $x_0<0$ 时，有

$$I = \int_{x_0}^0\frac{3a^2-3x^2}{2(a^2-x^2)}\mathrm{d}x = -\frac{a}{4}\ln\frac{a+x_0}{a-x_0}-x_0 = |z_0|+|x_0|.$$

故，只要 $|x_0|<a$，总有 $s=|z_0|+|x_0|$.

例 4 计算圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 界于 xoy 平面与曲面 $z=R+x^2/R$ 之间的一块面积 $(R>0)$.

解 由第一型曲线积分的几何意义知，面积 S 等于被积函数为 $Z=R+x^2/R$，积分路线为 $x^2+y^2=R^2$ 的第一型曲线积分的值，

$$S=\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = 4\int_0^{\pi/2}\left(R+\frac{R^2\cos^2\theta}{R}\right)R\mathrm{d}\theta$$

$$= 4R^2\int_0^{\pi/2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta = 3\pi R^2.$$

例 5 计算球面上的三角形 $x^2+y^2+z^2=a^2, x>0, y>0, z>0$ 的围线的质心坐标($\rho=1$).

解 由对称性知 $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}$. 围线长为 $s=3\left(\frac{1}{4}\cdot 2\pi a\right)=\frac{3}{2}\pi a$. 球面上三条曲边的球坐标方程为

$$x = a\cos\theta, y = a\sin\theta, z = 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2;$$

$$x = a\cos\varphi, y = 0, z = a\sin\varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2;$$

$$x = 0, y = a\cos\varphi, z = a\sin\varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2.$$

故
$$\bar{x}= \left[\int_0^{\pi/2} a\cos\theta \cdot a\mathrm{d}\theta + \int_0^{\pi/2} a\cos\varphi \cdot a\mathrm{d}\varphi\right]\Big/\left(\frac{3}{2}\pi a\right)$$

$$= 2a^2\Big/\left(\frac{3}{2}\pi a\right) = \frac{4a}{3\pi},$$

即,质心坐标$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(\frac{4a}{3\pi},\frac{4a}{3\pi},\frac{4a}{3\pi}\right)$.

例 6 求螺线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=ht/(2\pi)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 一支对于坐标轴的转动惯量.

解 $\mathrm{d}s = \sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+h^2/(4\pi^2)}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}\mathrm{d}t.$

$$I_x= \int_L (y^2 + z^2)\mathrm{d}s + \int_0^{2\pi}\left(a^2\sin^2 t + \frac{h^2t^2}{4\pi^2}\right)\frac{\sqrt{4\pi^2a^2 + h^2}}{2\pi}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\sqrt{4\pi^2a^2 + h^2} + \frac{h^2}{8\pi^3}\sqrt{4\pi^2a^2 + h^2}\cdot\frac{1}{3}(2\pi)^3$$

$$= \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2 + h^2},$$

$$I_y= \int_L (x^2 + y^2)\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2 t + \frac{h^2t^2}{4\pi^2}\right)\frac{\sqrt{4\pi^2a^2 + h^2}}{2\pi}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\sqrt{4\pi^2a^2 + h^2} + \frac{h^2}{8\pi^3}\sqrt{4\pi^2a^2 + h^2}\cdot\frac{1}{3}(2\pi)^3$$

$$= \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2 + h^2},$$

$$I_z=\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi} a^2\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}\mathrm{d}t=a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}.$$

二、第一型曲面积分的计算与应用

第一型曲面积分又称为对面积的曲面积分，是一个标量，因此不需要区分曲面的侧. 由于 $\mathrm{d}S$ 总是正值，所以化为二重积分时，积分上限应大于下限.

例 7 计算下列曲面积分：

(1) $\iint\limits_S (x+y+z)\mathrm{d}S$，$S$ 为平面 $y+z=5$ 被柱面 $x^2+y^2=25$ 截得的部分；

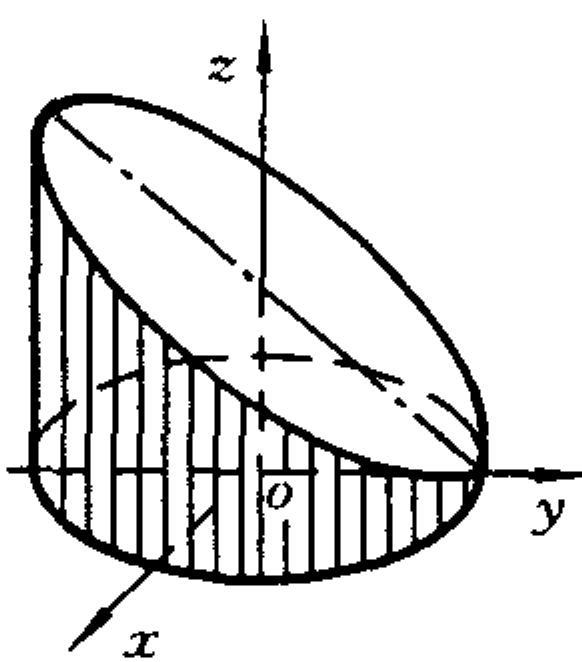


图 14.1

(2) $\iint\limits_S z^2\mathrm{d}S$，$S$ 为锥面 $x=r\cos\theta\cos\varphi, y=\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\varphi$ ($0\leqslant r\leqslant R, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0<\varphi<\pi/2$) 的部分；

(3) $\iint\limits_S z\mathrm{d}S$，$S$ 为螺旋面 $x=u\cos v, y=u\sin v, z=v$ 的一部分，$0\leqslant u\leqslant a, 0\leqslant v\leqslant 2\pi$.

解 (1) 如图 14.1 建立坐标系. 因为 $z=5-y$，所以 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+(-1)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，于是

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}(x+y+5-y)\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^5\sqrt{2}(5+r\cos\theta)r\mathrm{d}r$$

$$=125\sqrt{2}\pi+0=125\sqrt{2}\pi.$$

(2) 从 x,y,z 中消去 r 和 θ，得 $z^2\tan^2\varphi=x^2+y^2$，故 D_{xy} 为 $x^2+y^2\leqslant R^2\sin^2\varphi$，$\mathrm{d}S=\frac{1}{\sin\varphi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，于是

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\sin\varphi}\frac{r^2\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}\cdot\frac{r}{\sin\varphi}\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\frac{\cos^2\varphi}{\sin^3\varphi}\int_0^{R\sin\varphi}r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}R^4\cos^2\varphi\sin\varphi.$$

(3)如图 14.2 建立坐标系. 因为 $E=\cos^2v+\sin^2v=1, F=$

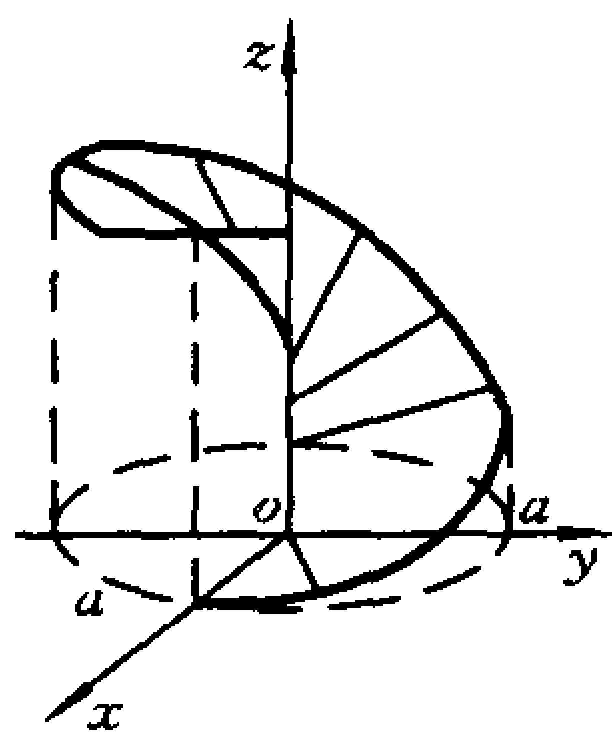


图 14.2

$-u\sin v\cos v + u\sin v\cos v = 0$，$G = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + 1 = 1 + u^2$，所以，$\mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，于是

$$I = \iint_D v\sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} v\mathrm{d}v\int_0^a \sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$= 2\pi^2\left[\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln(u + \sqrt{1+u^2})\right]\Bigg|_0^a$$

$$= \pi^2[a\sqrt{1+a^2} + \ln(a + \sqrt{1+a^2})].$$

例 8 计算下列曲面积分：

(1) $F(t) = \iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$，$S$ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$；当 $z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}$ 时 $f(x,y,z) = x^2 + y^2$，当 $z < \sqrt{x^2+y^2}$ 时 $f(x,y,z) = 0$；

(2) $\iint_S (ax + by + cz + d^2)\mathrm{d}S$，$S$ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

解 (1) 将 S 按 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 分为两部分，于是

$$F(t) = \iint_{S_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S + \iint_{S_2} 0\mathrm{d}S.$$

其中 S_1 为 $x^2+y^2+z^2=t^2$，$z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}$. 此时 $\mathrm{d}S = t^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，$x^2+y^2 = t^2\sin^2\varphi$，于是

$$F(t) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4} t^2\sin^2\varphi\cdot t^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\pi t^4\int_0^{\pi/4}(1-\cos^2\varphi)\mathrm{d}(-\cos\varphi) = \frac{1}{6}(8 - 5\sqrt{2})\pi t^4.$$

(2) 由对称性与奇偶性并利用轮换对称性，有

$$I = d^2\iint_S \mathrm{d}S + (a^2+b^2+c^2)\iint_S x^2\mathrm{d}S$$

$$= d^2\cdot 4\pi R^2 + \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\iint_S (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$$

$$= d^2 \cdot 4\pi R^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)R^2 \cdot 4\pi R^2$$

$$= 4\pi R^2\left[d^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)R^2\right].$$

例 9 求高为 $2h$、半径为 R、质量均匀的正圆柱对圆柱中心轴与中央横截面一条直径的转动惯量.

解 如图 14.3 建立坐标系，则 $\mathrm{d}S = \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，于是，对圆柱中心轴的转动惯量即 I_z. 但也可以不用化为二重积分，得

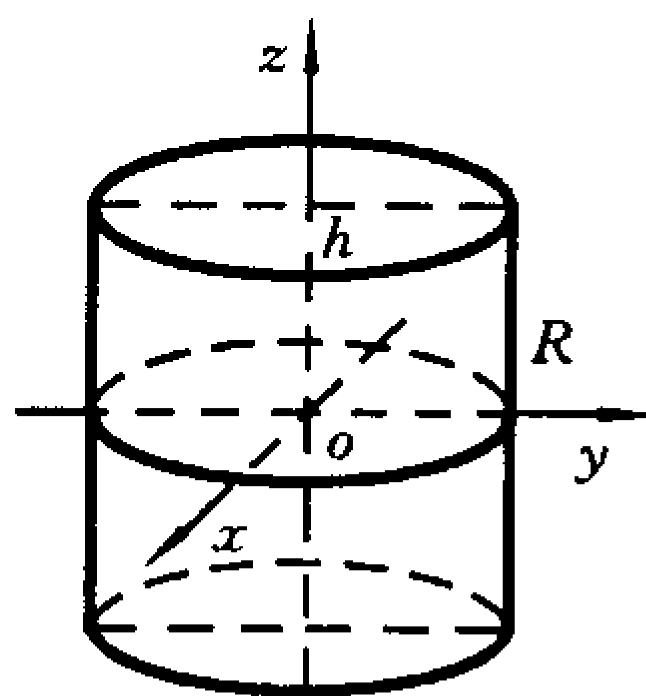


图 14.3

$$I_z = \rho\iint\limits_S (x^2 + y^2)\mathrm{d}S = \rho R^2 \iint\limits_S \mathrm{d}S = 4\rho R^3 h\pi.$$

这里 S 是圆柱的侧面，故 $\iint\limits_S \mathrm{d}S = 4\pi Rh$.

求对中央横截面一条直径的转动惯量，即求 I_x 或 I_y.

$$I_x = \iint\limits_S \rho(y^2 + z^2)\mathrm{d}S = 2\rho\int_{-R}^{R}\mathrm{d}y\int_{-h}^{h}(y^2 + z^2)\frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}}\mathrm{d}z$$

$$= 4\rho hR\int_{-R}^{R}\frac{y^2\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2 - y^2}} + \frac{4}{3}\rho Rh^3\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2 - y^2}}$$

$$= 4\rho h \cdot \frac{\pi}{2}R^3 + \frac{4}{3}\pi\rho Rh^3 = 2\pi h\rho R\left(R^2 + \frac{2}{3}h^2\right).$$

例 10 设球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上的密度等于点到 xoy 平面的距离，求球面被 $x^2+y^2=ax$ 截下部分曲面的重心.

解 由曲面对称性知，$\overline{y}=\overline{z}=0$. 球面上半部曲面为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，故 $\mathrm{d}S=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；截得曲面在 xoy 面上投影为 $(x-a/2)^2+y^2=a^2/4$，故

$$M = 2\iint\limits_{S_1}|z|\mathrm{d}S = 2\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2a\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2a\cdot\pi\frac{a^2}{4} = \frac{\pi}{2}a^3.$$

这里 S_1 是截得曲面中位于上半球面的部分.

$$M_{yz} = \iint\limits_{S}|z|x\mathrm{d}S = 2\iint\limits_{S_1}xz\mathrm{d}S$$

$$= 2\iint\limits_{D_{xy}}x\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2a\iint\limits_{D_{xy}}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2a\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{4}{3}a^4\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}a^2.$$

故
$$\bar{z} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\pi a^2}{4}\Big/\frac{\pi a^3}{2} = \frac{1}{2a}.$$

第二节　第二型曲线积分

主要内容

1. 设 P,Q 为定义在光滑或按段光滑平面有向曲线 L 上的函数, $\forall T$, 把 L 分成 n 个小弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}m_i}$. 这里 $M_{i-1}(x_{i-1},y_{i-1})$, $M_i(x_i,y_i)$, $i=1,2,\cdots,n$. 记各弧段长为 ΔS_i, 分割的细度为 $\|T\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta S_i\}$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $i=1,2,\cdots n$. (ξ_i,η_i) 为 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上任一点. 若极限

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,n_i)\Delta x_i + \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,n_i)\Delta y_i$$

存在且与分割 T 及点 (ξ_i,n_i) 的取法无关, 则称此极限为函数 P,Q

沿有向曲线 L 的第二型曲线积分，记作$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$.

若记 $\boldsymbol{F}(x,y)=(P(x,y)+Q(x,y))$，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$，则有向量形式$\int_L \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

2. 设 $L: x=\varphi(t), y=\psi(t), t\in[\alpha,\beta]$为$[\alpha,\beta]$上光滑或按段光滑的平面曲线. P,Q 为 L 上的连续函数，则沿 L 从 $A(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))$ 到 $B(\varphi(\beta),\psi(\beta))$的第二型曲线积分为

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_\alpha^\beta[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]\mathrm{d}t.$$

疑难解析

1. 第二型曲线积分与第一型曲线积分有什么不同?

答 第二型曲线积分又称为对坐标的曲线积分，它与曲线的方向有关. 因此，在化为定积分计算时，应该是下限对应于起点，上限对应于终点，而不论其大小；在分段求积时，要注意分点的衔接.

第二型曲线积分也可以化为定积分来计算，还可以利用原函数以及化为第一型曲线积分来计算. 例如，计算

$$\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2},\quad L \text{ 为 } x^2+y^2=a^2 \text{ 逆向}.$$

若令 $x=a\cos t, y=a\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$，则

$$I=\frac{1}{a^2}\int_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t)\mathrm{d}t=2\pi.$$

因为 $\theta=\arctan\frac{y}{x}$，$\mathrm{d}\theta=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，所以

$$I=\int_L \mathrm{d}\theta=\theta\Big|_0^{2\pi}=2\pi.$$

若令 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，则

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_L \frac{x\cos(\tau,y) - y\cos(\tau,x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}S \\
&= \oint_L \frac{x\cos(n,x) - y\cos(n,y)}{x^2+y^2}\mathrm{d}S \\
&= \oint_L \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^2}\mathrm{d}S = \frac{1}{a}\int_L \mathrm{d}S = \frac{1}{a}2\pi a = 2\pi.
\end{aligned}
$$

在验证积分与路线无关后，可选择比较简单的路径计算. 在满足格林公式或斯托克斯公式条件时，可利用公式计算. 所以，第二型曲线积分要比第一型曲线积分复杂.

2. 第二型曲线积分与第一型曲线积分有什么联系？

答 两类曲线积分来自不同的物理原型，有不同的特性，但在规定了曲线方向后，两类曲线积分可以相互转化.

若 $L: x=x(s), y=y(s), 0\leqslant s\leqslant t$. $(t,x),(t,y)$ 分别表示切线方向 t 与 x 轴和 y 轴正向的夹角. $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 是曲线 L 上的连续函数，则

$$
\begin{aligned}
&\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \int_L [P(x,y)\cos(t,x) + Q(x,y)\cos(t,y)]\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

方法、技巧与典型例题分析

在计算第二型曲线积分时，要特别注意：(1)曲线的方向、起点与终点及分段点；(2)曲线是否经过或绕某个不连续点；(3)曲线是否封闭；(4)曲线是否满足格林公式条件；(5)曲线是否满足与路径无关条件. 进行定积分计算时应尽量利用已有方法、技巧与结果.

例 1 计算下列曲线积分：

(1) $\oint x^2 y\mathrm{d}x + y^3\mathrm{d}y$，$L$ 沿 $y^3 = x^2$ 和 $y = x$ 所围成的封闭曲线正向；

(2) $\int_L (x^2 - 2xy)\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\mathrm{d}y$，$L$ 为抛物线 $y = x^2$ 上对应 x 从 -1 到 1 的一段；

(3) $\int_L x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + (x + y - 1)\mathrm{d}z$，$L$ 为由点(1,1,1)到点(1,3,4)的直线段.

解 本例可用定积分计算.

(1) $L=L_1+L_2$，L_1 为 $y^3=x^2$，x 从 1 到 0；L_2 为 $y=x$，x 从 0 到 1. 于是

$$\int_{L_1} x^2y\mathrm{d}x + y^3\mathrm{d}y = \int_1^0 x^2 \cdot x^{2/3}\mathrm{d}x + \int_1^0 y^3\mathrm{d}y = -\frac{23}{44},$$

$$\int_{L_2} x^2y\mathrm{d}x + y^3\mathrm{d}y = \int_0^1 x^2 \cdot x\mathrm{d}x + \int_0^1 y^3\mathrm{d}y = \frac{1}{2}.$$

故
$$\oint_L x^2y\mathrm{d}x + y^3\mathrm{d}y = -\frac{1}{44}.$$

(2)
$$I = \int_{-1}^1 (x^2 - 2x \cdot x^2)\mathrm{d}x + (x^4 - 2x \cdot x^2)2x\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-1}^1 (x^2 - 4x^4)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (x^2 - 4x^4)\mathrm{d}x = -\frac{14}{15}.$$

(3) 直线的参数方程为：$x = 1$，$y = 1 + 2t$，$z = 1 + 3t$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$，于是

$$I = \int_0^1 [1 + (1 + 2t) \cdot 2 + 3(1 + 2t)]\mathrm{d}t = \int_0^1 (5 + 10t)\mathrm{d}t = 10.$$

例 2 计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L (y - z)\mathrm{d}x + (z - x)\mathrm{d}y + (x - y)\mathrm{d}z$，$L$ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$，$y = \sqrt{3}x$，从 x 轴正向看时圆周沿逆向绕行；

(2) $\oint_L \dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{[(\alpha x + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2]^n}$ $(\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$，$L$ 为椭圆 $(\alpha x + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2 = 1$ 的逆时针方向.

解 选择好参数方程是解题的关键.

(1) 将 $x^2+y^2+z^2=1$ 表示为 $r=1$，$y=\sqrt{3}x$ 表示为 $\theta=$

$\pi/3$,则 L 为 $x=\frac{1}{2}\sin\theta, y=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta, z=\cos\theta$,$\theta$ 从 $2\pi\to0$,于是

$$I=\int_{2\pi}^{0}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\cos\theta\right)\cdot\frac{1}{2}\cos\theta\right.$$

$$+\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)(-\sin\theta)\right]d\theta$$

$$=\int_{2\pi}^{0}\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)d\theta=(1-\sqrt{3})\pi.$$

(2) L 的参数方程为 $\alpha x+\beta y=\cos t, \gamma x+\delta y=\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$,

则 $x=\frac{1}{\alpha\delta-\gamma\beta}(\delta\cos t-\beta\sin t), y=\frac{1}{\alpha\delta-\gamma\beta}(\alpha\sin t-\gamma\cos t)$,于是

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\alpha\delta-\gamma\beta}(\delta\cos t-\beta\sin t)d\left[\frac{1}{\alpha\delta-\gamma\beta}(\alpha\sin t-\gamma\cos t)\right]$$

$$-\int_0^{2\pi}\frac{1}{\alpha\delta-\gamma\beta}(\alpha\sin t-\gamma\cos t)d\left[\frac{1}{\alpha\delta-\gamma\beta}(\delta\cos t-\beta\sin t)\right].$$

由$(0,2\pi)$内三角函数系的正交性,可得

$$I=\frac{1}{(\alpha\delta-\gamma\beta)^2}\int_0^{2\pi}(\alpha\delta-\gamma\beta)dt=\frac{2\pi}{\alpha\delta-\gamma\beta}.$$

例 3 证明:曲线积分有估计式

$$\left|\int_L P dx+Q dy\right|\leqslant LM,$$

其中 L 为积分路径长度,$M=\max\sqrt{P^2+Q^2}$(在 L 上).

证 由两类曲线积分的联系,有

$$\left|\int_L P dx+Q dy\right|=\left|\int_L (P\cos\alpha+Q\sin\alpha)ds\right|$$

$$\leqslant\int_L |P\cos\alpha+Q\sin\alpha|ds.$$

而 $(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2=P^2\cos^2\alpha+Q^2\sin^2\alpha+PQ2\sin\alpha\cos\alpha$,

$0\leqslant(P\sin\alpha-Q\cos\alpha)^2=P^2\sin^2\alpha+Q^2\cos^2\alpha-PQ2\sin\alpha\cos\alpha$,

则 $(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2\leqslant P^2+Q^2$，从而

$$|P\cos\alpha + Q\sin\alpha| \leqslant \sqrt{P^2 + Q^2} \leqslant M.$$

于是
$$\left|\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y\right| \leqslant M\int_L \mathrm{d}s = LM.$$

例 4 若 $f(u)$ 为连续函数，L 为按段光滑的封闭曲线，证明：

$$\oint_L f(x^2 + y^2)(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) = 0.$$

证 令 $F(x,y) = \dfrac{1}{2}\int_0^{x^2+y^2} f(u)\mathrm{d}u$，由 $f(u)$ 的连续性有，$F_x'(x,y) = xf(x^2 + y^2)$，$F_y'(x,y) = yf(x^2 + y^2)$。显然 F_x' 和 F_y' 是连续函数，故 $F(x,y)$ 可微，且有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F(x,y) &= xf(x^2 + y^2)\mathrm{d}x + yf(x^2 + y^2)\mathrm{d}y \\ &= f(x^2 + y^2)(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y).\end{aligned}$$

于是，$\forall\ (x_0,y_0)\in L$，由于 L 是封闭的，所以

$$\oint_L f(x^2 + y^2)(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) = F(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y_0)} = 0.$$

例 5 方向为纵轴的负向、大小等于作用点的横坐标平方的力构成一力场。求质量为 m 的点沿曲线 $1-x=y^2$ 从点 $(1,0)$ 移到点 $(0,1)$ 所做的功.

解 因为 $\boldsymbol{F}=0\boldsymbol{i}-x^2\boldsymbol{j}$，所以

$$W=\int_L 0\mathrm{d}x - x^2\mathrm{d}y = -\int_L x^2\mathrm{d}y = -\int_0^1 (1 - y^2)^2\mathrm{d}y = -\frac{8}{15}.$$

即场力做负功，大小为 8/15.

例 6 已知力场 $\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$，问将质点从原点沿直线移到曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的第一卦限部分上哪一点做的功最大，并求最大功.

解 $\forall\ P_0(x_0,y_0,z_0)\in \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，直线方程 L 为 $x=x_0t$，$y=y_0t$，$z=z_0t$，t 从 0 变到 1，则

$$W=\int_L yz\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z=3x_0y_0z_0\int_0^1 t^2\mathrm{d}t=x_0y_0z_0.$$

由 P_0 的任意性知，$W=xyz$.

最大功为 $W=xyz$ 在条件$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 下的极值，据第十一章第二节例 14 结果知，最大值点

$$(x,y,z)=\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right),$$

故最大功 $W_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{9}abc$.

例 7 说明对第二型曲线积分，“积分中值定理”不再成立.

答 如果有积分中值定理，应该是这样的：若 $f(P)$在 L 上连续，则存在点 $P^*\in L$，使得

$$\int_{L^+} f(P)\mathrm{d}x=f(P^*)\int_{L^+}\mathrm{d}x.$$

设 L 为圆周，由对称性知$\int_{L^+}\mathrm{d}x=0$，故上式右边对一切 f 都等于零. 但是，当 $f(P)=f(x,y)=y$，L^+ 为 $x^2+y^2=2y$ 时（逆时针向），有

$$\int_{L^+} f(P)\mathrm{d}x=\int_{L^+} y\mathrm{d}x=-\pi\neq 0.$$

推出矛盾，故积分中值定理不成立.

第三节 格林公式 曲线积分与路径的无关性

主要内容

1. 若函数 P,Q 在闭区域 $D=\mathbf{R}^2$ 上连续，且有一阶连续偏导数，则有格林(Green)公式

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

成立，其中 L 为区域 D 的边界曲线，取正方向.

2. 设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是单连通闭区域. 若函数 P, Q 在 D 内连续，且有一阶连续偏导数，则以下四个命题等价：

(1) $\forall$ 光滑闭曲线 $L \in D$, $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$;

(2) $\forall$ 光滑曲线 $L \in D$, $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与积分路线无关，只与 L 的起点和终点有关；

(3) $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 必为 D 内某函数 $u(x,y)$ 的全微分，且 $\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$;

(4) 在 D 内每一点，有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

疑 难 解 析

1. 格林公式有什么意义？它应用在哪些方面？

答 格林公式给出了有限条按段光滑的封闭曲线上的曲线积分与它们所包围的区域上的二重积分的关系. 当区域 D 为单连通域时，L 正向即逆时针方向；当 D 为多连通域时，D 的外边界为逆时针方向，内边界为顺时针方向. P, Q 要求在区域 D 内直到边界 L 上连续，且有连续的偏导数.

利用格林公式可以将封闭曲线上的线积分化为区域上的二重积分来计算；对开口曲线上的线积分可以补上一段曲线后变成封闭曲线，再应用格林公式.

格林公式的一个简单应用就是求面积，即

$$\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$

格林公式在力学中还有许多应用.

2. 怎样求 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\mathrm{d}u$ 的函数 $u(x,y)$?

答 常用折线法、偏积分法和凑微分法.

(1) 折线法. 由 $u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$,得

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y$$

或

$$=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x.$$

(2) 偏积分法. 因为 $P(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x},Q(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}$,故

$$u(x,y)=\int_0^x\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+g(y)=\int_0^x x_0P(x,y)\mathrm{d}x+g(y)$$

或

$$\int_0^y\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+h(x)=\int_0^yQ(x,y)\mathrm{d}y+h(x).$$

再求出$\dfrac{\partial u}{\partial y}$与 $Q(x,y)$比较,确定 $g(y)$,得出 $u(x,y)$.

(3) 将 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}x$ 通过拆项、拼项凑出全微分 $\mathrm{d}u$,需要一定的技巧.

方法、技巧与典型例题分析

利用格林公式,首先要验证是否满足定理条件,满足条件才可化为二重积分来计算. 当需要添加曲线段时,要尽量使添加的曲线段上的线积分简单,更不要忘了最后减去添加部分.

例 1 计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L(yx^3+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}x+(xy^3+x\mathrm{e}^y-2y)\mathrm{d}y$,$L$ 为 $x^2+y^2=a^2$ 正向;

(2) $\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^y\cos y-m)\mathrm{d}y$,$L$ 为 $A(a,0)\to o(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax$;

(3) $\oint_L (-2x^3y)\mathrm{d}x + x^2y^2\mathrm{d}y$，$L$ 为 $x^2+y^2\geqslant 1$ 与 $x^2+y^2\leqslant 2y$ 所围区域边界正向.

解 本例可利用格林公式求解.

(1) 因为$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=y^3-x^3$，所以

$$I=\iint_D (y^3-x^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r(r^3\cos^3\theta-r^3\sin^3\theta)\mathrm{d}r$$

$$=\frac{a^5}{5}\int_0^{2\pi}(\sin^3\theta-\cos^3\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a^5}{5}\left[\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta-1)\mathrm{d}\cos\theta-\int_0^{2\pi}(1-\sin^2\theta)\mathrm{d}\sin\theta\right]=0.$$

(2) 因为$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=m$，添加直线段 oA ($y=0,0\leqslant x\leqslant a$) 构成封闭曲线，取正向，所以$\int_L=\oint_{L_1}-\int_{oA}$，而$\int_{oA}=\int_0^a 0\mathrm{d}x+0=0$. 于是

$$I=\oint_{L_1}-0=\iint_D m\mathrm{d}x\mathrm{d}y=m\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=m\cdot\frac{1}{8}\pi a^2=\frac{1}{8}\pi ma^2.$$

(3) 如图 14.4 建立坐标系. 因为$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=2xy^3+2x^3$，所以

$$I=\iint_D(2xy^2+2x^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D 2x(y^2+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于被积函数是 x 的奇函数，而积分域关于 y 轴对称. 故

$$I=\iint_D 2x(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

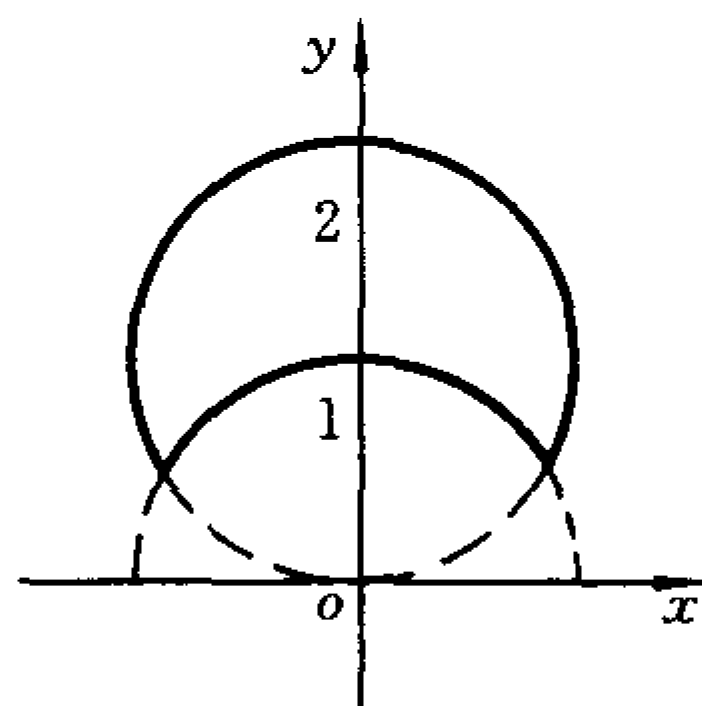


图 14.4

例 2 计算 $\oint_L \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}$，$L$ 为任一不通过原点的简单光滑闭曲线正向.

解 因为不过原点，所以 L 上 $x^2+4y^2\neq 0$，且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{4y^2-x^2}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

当 L 不绕原点时，D 为单连通域，$\oint_L=0$.

当 L 绕原点时，作一小圆周 $C:x^2+4y^2=\varepsilon^2$，C 包含在 L 内，则

$$\oint_L=\oint_C\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x.$$

因为 $\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，故由 $\frac{x^2}{\varepsilon^2}+\frac{y^2}{(\varepsilon/2)^2}=1$ 得

$$\oint_L=\frac{1}{\varepsilon^2}2\cdot\left(\frac{1}{2}\pi\varepsilon^2\right)=\pi.$$

同理，$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\begin{cases}0, & L\text{ 不绕原点},\\ 2\pi, & L\text{ 绕原点}.\end{cases}$

例 3 计算曲线积分

$$\oint_L\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}+x^2\right)\mathrm{d}x,$$

L 由 $x^2+y^2=2y,x^2+y^2=4y,x=\sqrt{3}y,x=\frac{1}{\sqrt{3}}y$ 所围成.

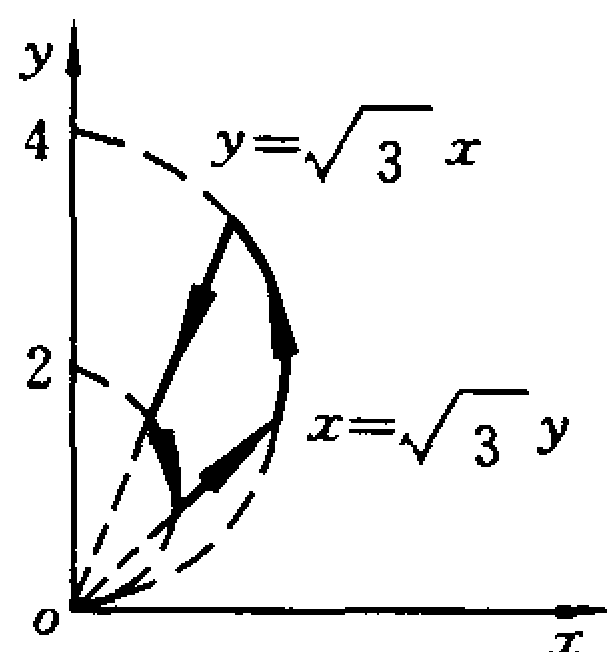


图 14.5

解 如图 14.5 所示，L 很复杂，可用格林公式求解. 因为 $\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}=2x$，所以

$$I=\iint\limits_D 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}2r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{112}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\sin^3\theta\mathrm{d}\sin\theta=\frac{14}{3}.$$

例 4 应用格林公式计算下列曲线所围区域的面积：

(1) 星形线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$； (2) 双纽线 $r^2=a^2\cos2\theta$.

解 (1) $S=\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}a^2(\sin^2t\cos^4t+\sin^4t\cos^2t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\mathrm{d}t = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

(2) $x = a\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta}$, $y = a\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}$.

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/4}a^2\cos 2\theta\mathrm{d}\theta = a^2.$$

例 5 求出指数 λ,使曲线积分

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{x}{y}r^\lambda\mathrm{d}x - \frac{x^2}{y^2}r^\lambda\mathrm{d}y \quad (r = \sqrt{x^2+y^2})$$

在 $y\neq 0$ 的区域内与路径无关,并求出积分值.

解 $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}r^\lambda + \lambda x\lambda^{\lambda-2}$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}(2xr^\lambda + \lambda x^3 r^{\lambda-2})$,

故 $$2xr^\lambda + \lambda x^3 r^{\lambda-2} = xr^\lambda + \lambda xy^2 r^{\lambda-2},$$

两边乘以 $r^{2-\lambda}$,化为

$$(2+\lambda)x^3 + 2xy^2 = x^3 + (1-\lambda)xy^2,$$

得 $$(2+\lambda) = 1,\quad (1-\lambda) = 2 \Rightarrow \lambda = -1.$$

当 $\lambda = -1$ 时,有

$$I = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{x}{y_0\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x - \frac{x^2}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y$$

$$= \int_{x_0}^{x}\frac{x}{y_0\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x - \int_{y_0}^{y}\frac{x^2}{y\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} - \frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{y_0^2}.$$

例 6 计算下列曲线积分:

(1) $\int_L (x^2 y + 3xe^x)\mathrm{d}x + \left(\frac{x^3}{3} - y\sin y\right)\mathrm{d}y$, L 为摆线 $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$,从 $o(0,0)$ 到 $A(\pi,2)$ 的弧段;

(2) $\int_L \frac{1+y^2 f(xy)}{y}\mathrm{d}x + \frac{x}{y^2}[y^2 f(x,y) - 1]\mathrm{d}y$, f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续导数, L 为从点 $(3,2/3)$ 到 $(1,2)$ 的直线段.

解 先考察积分是否与路径无关,再进行计算.

(1) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=x^2=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,故积分与路径无关. 选从$(0,0)\rightarrow(\pi,0)\rightarrow(\pi,2)$ 的折线段为积分路径,于是

$$I=\int_0^{\pi}3xe^x\mathrm{d}x+\int_0^2\left(\frac{\pi^3}{3}-y\sin y\right)\mathrm{d}y$$

$$=3(xe^x-e^x)\Big|_0^{\pi}+\left(\frac{\pi^3}{3}y-\sin y+y\cos y\right)\Big|_0^2$$

$$=3e^{\pi}(\pi-1)+3+2\pi^3/3+2\cos 2-\sin 2.$$

(2) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=f(xy)+xyf'(xy)-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,故积分与路径无关. 选择折线段$(3,2/3)\rightarrow(1,2/3)\rightarrow(1,2)$为积分路径,于是

$$I=\int_3^1\frac{3}{2}\left[1+\frac{4}{9}f\left(\frac{2}{3}x\right)\right]\mathrm{d}x\int_{2/3}^2\left[f(y)-\frac{1}{y^2}\right]\mathrm{d}y$$

$$=-3+\frac{2}{3}\int_3^1 f\left(\frac{2}{3}x\right)\mathrm{d}x+\int_{2/3}^2 f(y)\mathrm{d}y-1.$$

设 $f(t)$的原函数为 $F(t)$,则

$$\frac{2}{3}\int_3^1 f\left(\frac{2}{3}x\right)\mathrm{d}x=F\left(\frac{2}{3}x\right)\Big|_3^1=F\left(\frac{2}{3}\right)-F(2),$$

$$\int_{2/3}^1 f(y)\mathrm{d}y=F(y)\Big|_{2/3}^1=F(2)-F\left(\frac{2}{3}\right),$$

故 $I=-3+F\left(\dfrac{2}{3}\right)-F(2)+F(2)-F\left(\dfrac{2}{3}\right)-1=-4.$

例 7 当 $x>-1$ 时,$f(x)$连续且可微,且 $f(0)=6/5$,对半平面 $x>-1$ 上的任一闭曲线,有

$$\oint_L[y-5ye^{-2x}f(x)]\mathrm{d}x+e^{-2x}f(x)\mathrm{d}y=0,$$

求 $f(x)$,并计算$\int_L[y-5ye^{-2x}f(x)]\mathrm{d}x+e^{-2x}f(x)\mathrm{d}y$,$L$ 为从$(1,0)$ 到$(2,3)$ 的弧段.

解 因为 $\oint_L=0$,所以$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,即

$$-2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}f'(x)=1-5e^{-2x}f(x),$$

有微分方程 $$f'(x)+3f(x)=e^{2x},$$

解得 $f(x)=e^{-\int 3dx}\left[\int e^{2x}\cdot e^{\int 3dx}dx+c\right]=\frac{1}{5}e^{2x}+ce^{-3x},$

因 $f(0)=\frac{6}{5}\Rightarrow c=1$，故 $f(x)=\frac{1}{5}e^{2x}+e^{-3x}.$

由于积分与路径无关，选折线段(1,0)→(2,0)→(2,3)为积分路径，于是

$$I=\int_1^2 P(x,0)dx+\int_0^3 Q(2,y)dy$$

$$=\int_0^3 e^{-4}\left(\frac{1}{5}e^4+e^{-6}\right)dy=\left(\frac{1}{5}+e^{-10}\right)y\Big|_0^3=3\left(\frac{1}{5}+e^{-10}\right).$$

例 8 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，当它满足什么条件时，曲线积分 $\int_L f(x,y)(ydx+xdy)$ 与路径无关？

解 因为 $P(x,y)=yf(x,y)$，$Q(x,y)=xf(x,y)$，

$$\frac{\partial P}{\partial y}=f(x,y)+yf'_y(x,y),\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=f(x,y)+xf'_x(x,y),$$

所以 $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow y\frac{\partial f}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial x}.$$

例 9 选取 a,b 值，使得 $\frac{ax+y}{x^2+y^2}dx-\frac{x-y+b}{x^2+y^2}dy$ 为函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求 $u(x,y)$.

解 因为 $P(x,y)=\frac{ax+y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\frac{-x+y-b}{x^2-y^2}$，

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x^2-2axy-y^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2-y^2-2xy+2bx}{(x^2+y^2)^2},$$

所以 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow 2axy=2xy,\quad 2bx=0\Rightarrow a=1,b=0.$

因为，除点(0,0)外，P,Q 具有一阶连续偏导数，于是

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}+c$$

$$= \int_1^x \frac{1}{x}dx - \int_0^y \frac{x-y}{x^2+y^2}dy + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \arctan\frac{y}{x} + c.$$

例 10 验证下列函数为某函数的全微分，并求出该函数.

(1) $(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$;

(2) $e^x[e^y(x-y+2)+y]dx+e^x[e^y(x-y)+1]dy$;

(3) $y\cos(xy)dx+x\cos(xy)dy+\sin z dz$.

解 先验证$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，再求 $u(x,y)$.

(1) $\frac{\partial P}{\partial y}=2(x-y)=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故存在 $u(x,y)$，且

$$u(x,y) = \int_0^x x^2 dx + \int_0^y (x^2-2xy-y^2)dy + c$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + c.$$

(2) $\frac{\partial P}{\partial y}=e^x[e^y(x-y+1)]+e^x=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故存在 $u(x,y)$，且

$$u(x,y) = \int_0^x e^x(x+2)dx + \int_0^y [e^{x+y}(x-y)+e^x]dy + c$$

$$= (x-y+1)e^{x+y} + ye^x + c.$$

(3) $\frac{\partial P}{\partial y}=\cos(xy)-xy\sin(xy)=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故存在 $u(x,y)$.

用线积分(折线法)求解，得

$$u(x,y,z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} y\cos(xy)dx + x\cos(xy)dy + \sin z dz + c$$

$$= \int_0^x 0dx + \int_0^y x\cos(xy)dy + \int_0^z \sin z dz + c$$

$$= \sin(xy) - \cos z + 1 + c_1 = \sin(xy) - \cos z + c.$$

用偏积分法求解，得$\frac{\partial u}{\partial x}=y\cos(xy)$，$\frac{\partial u}{\partial y}=x\cos(xy)$，$\frac{\partial u}{\partial z}=\sin z$.

任取其中一式$\left(如\frac{\partial u}{\partial x}\right)$积分，于是

$$u(x,y,z)=\int_0^x y\cos(xy)\mathrm{d}x+\varphi(y,z)$$
$$=\sin(xy)+\varphi(y,z).$$

又
$$\frac{\partial u}{\partial y}=x\cos(xy)+\varphi_y'(y,z)=x\cos(xy),$$

故
$$\varphi_y'(y,z)=0\Rightarrow\varphi(y,z)=\psi(z).$$

因为 $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\varphi_z'(y,z)=\psi'(z)=\sin z\Rightarrow\psi(z)=-\cos z+c,$

即
$$\varphi(y,z)=-\cos z+c,$$

所以
$$u(x,y,z)=\sin(xy)-\cos z+c.$$

用凑微分法，即利用微分公式与法则求解，得

$$\mathrm{d}u(x,y,z)=y\cos(xy)\mathrm{d}x+x\cos(xy)\mathrm{d}y+\sin z\mathrm{d}z$$
$$=\cos(xy)y\mathrm{d}x+\cos(xy)x\mathrm{d}y+\sin z\mathrm{d}z$$
$$=\mathrm{d}[\sin(xy)-\cos z],$$

故
$$u(x,y,z)=\sin(xy)-\cos z+c.$$

例 11 利用格林公式计算 $\oint_L\dfrac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S$，其中 $u(x,y)=x^2+y^2$，L 为 $x^2+y^2=6x$ 正向，$\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 为 u 沿 L 的外法线方向导数.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial n}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y)=2x\cos\beta-2y\cos\alpha$，其中 α,β 是曲线 L 上在点 (x,y) 切线的方向角，故

$$\oint_L\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\oint_L(2x\cos\beta-2y\cos\alpha)\mathrm{d}S.$$

化为第二型曲线积分后再利用格林公式，有

$$I=\oint_L(-2y\cos\alpha+2x\cos\beta)\mathrm{d}S$$
$$=\oint_L(-2)y\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_D4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\cdot9\pi=36\pi.$$

第四节　第二型曲面积分

主要内容

1. 设 P,Q,R 为定义在双侧曲面 S 上的函数，在 S 上指定一侧作分割 T，分 S 为 n 个小曲面 $S_1,S_2,\cdots,S_n$，分割的细度 $\|T\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{S_i$ 的直径$\}$. 以 $\Delta S_{i_{yz}},\Delta S_{i_{zx}},\Delta S_{i_{xy}}$ 分别表示 S_i 在三个坐标面上的投影区域的面积. 当 S_i 的法线正向与 z 轴正向夹角小于 $\pi/2$ 时，$\Delta S_{i_{xy}}$ 取正值；当该夹角大于 $\pi/2$ 时，$\Delta S_{i_{xy}}$ 取负值. $\Delta S_{i_{yz}},\Delta S_{i_{zx}}$ 正负值取法类似. 在各小曲面积 S_i 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，若极限

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{yz}}+\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{zx}}$$

$$+\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{xy}}$$

存在，且与 S 的分割 T 和点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的取法无关，则称此极限为函数 P,Q,R 在曲面 S 指定一侧上的第二型曲面积分，记作

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. 设 R 是定义在光滑曲面 $S:z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$ 上的连续函数，以 S 的上侧为正侧，则

$$\iint\limits_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3. 若光滑曲面由参量方程给出，$S:x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),(u,v)\in D$，且在 D 上函数行列式 $\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 不同时为零，则有

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm \iint_D P(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

$$\iint_S Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \pm \iint_D Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

$$\iint_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm \iint_D R(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

当 uov 平面的正方向对应曲面 S 选定的一侧时，二重积分前取正号，否则取负号.

疑难解析

1. 为什么要将曲面分侧？

答 第二型曲面积分又称为对坐标的曲面积分，积分是在曲面上进行的，但积分不是对 $\mathrm{d}S$ 而是对 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（或 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\mathrm{d}z\mathrm{d}x$）进行的. 这里的 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 实际上是 ΔS 在 xoy 面上的投影，因此是有方向的. 这样，就需要考虑曲面的侧，即考虑积分是对曲面的某一侧进行的，对不同侧进行的积分有不同的值. 事实上，大多数曲面都是双侧的，因此，必须区分曲面的侧，在指定的侧上进行第二型曲面积分.

方法、技巧与典型例题分析

在计算第二型曲面积分时，很重要的一步是根据指定的侧确定二重积分前面的符号. 一般可以依据几何知识确定. 其实，计算第二型曲面积分的方法不是惟一的，读者可以多尝试新的解法.

例 1 用多种方法计算曲面积分

$$\iint_D (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

S 为 $z^2=x^2+y^2$ $(0\leqslant z\leqslant h)$ 的下侧.

解法 1 化曲面积分为二重积分.

取 $x>0$ 部分前侧为 S_1，$x<0$ 部分后侧为 S_2，$y>0$ 部分右侧为 S_3，$y<0$ 部分左侧为 S_4，则

$$\iint_S (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{S_1}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{S_2}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{D_{yz}}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{D_{yz}}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0,$$

类似地，有

$$\iint_S (z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_{S_3}(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \iint_{S_4}(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0,$$

$$\iint_S (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h r^2(\cos\theta-\sin\theta)\mathrm{d}r = 0.$$

解法 2 化为第一型曲面积分来求解. 因为

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_S [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]\mathrm{d}S,$$

其中 α,β,γ 分别是曲面 S 上法向量与三个坐标轴正向的夹角.

因为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$z_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$z_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}$，$\cos\beta=\dfrac{y}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}$，$\cos\gamma=-\dfrac{1}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}$，故

$$I = \iint_S [(y-z)\cos\alpha + (z-x)\cos\beta + (x-y)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}}\left(-x+y-\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由区域的对称性与被积分函数的奇偶数知，$I=0$.

(3) 用高斯公式(见下节)求解.

添加曲面 $S_0: z=h, x^2+y^2 \leqslant h^2$,并取其上侧,则

$$I=\oiint\limits_{S+S_0} - \iint\limits_{S_0} = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V - \iint\limits_{S_0}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_V 0\mathrm{d}V - \iint\limits_{S_0}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由区域的对称性与被积分函数的奇偶性知,$I=0$.

(4) 因为$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$,所以曲面积分与曲面形状无关,只与边界曲线有关. 故取曲面为题(3)中 S_0 的下侧,则由区域的对称性与函数的奇偶性知

$$I=\iint\limits_{S_0}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

例 2 计算下列曲面积分:

(1) $\oiint\limits_S \frac{1}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$S$ 为椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 外侧;

(2) $\iint\limits_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$f,g,h$ 为连续函数,S 为平行六面体 $0<x<a, 0<y<b, 0<z<c$ 的外表面;

(3) $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$S$ 是平面 $2x+2y+z=2$ 在第一卦限部分的上侧.

解 (1) $I=\oiint\limits_S \frac{1}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\oiint\limits_S \frac{1}{y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\oiint\limits_S \frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

$$I_1=\oiint\limits_S \frac{1}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{a\sqrt{1-y^2/b^2-z^2/c^2}}$$

$$=\frac{8}{a}\int_0^b \mathrm{d}y\int_0^{c\sqrt{1-y^2/b^2}}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-y^2/b^2-z^2/c^2}}=\frac{4\pi abc}{a^2},$$

其中 D_{xy}为$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$. 由轮换对称性，得

$$\oiint_S \frac{1}{y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \frac{4\pi abc}{b^2},\quad \oiint_S \frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{4\pi abc}{c^2}.$$

故 $I = \frac{4\pi abc}{a^2} + \frac{4\pi abc}{b^2} + \frac{4\pi abc}{c^2} = 4\pi abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$

(2) 先计算$\iint_S h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，由于侧面垂直于 xoy 面，故

$$\iint_S h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} h(c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_{xy}} h(0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= (h(c) - h(0))\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = abc\,\frac{h(c) - h(0)}{c}.$$

由轮换对称性，得

$$\iint_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = abc\,\frac{f(a) - f(0)}{a},$$

$$\iint_S g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = abc\,\frac{g(b) - g(0)}{b}.$$

故 $I = abc\left[\frac{f(a) - f(0)}{a} + \frac{g(b) - g(0)}{b} + \frac{h(c) - h(0)}{c}\right].$

(3) 由于 S 取上侧，故法向量与 z 轴的夹角为锐角，方向余弦分别为 $\cos\alpha = 2/3, \cos\beta = 2/3, \cos\gamma = 1/3$，于是

$$I = \iint_S\left[\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}(x + z)\right]\mathrm{d}S = \frac{1}{3}\iint_S (3x + 2y + z)\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{3}\iint_S [(2x + 2y + z) + x]\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{3}\iint_S (2 + x)\mathrm{d}S \text{（因为 } 2x + 2y + z = 2\text{）}.$$

而 D_{xy}为 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1-x, \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=3$，故

$$I = \frac{1}{3}\iint_{D_{xy}}(2 + x)\cdot 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(2 + x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 (-x^2 - x + 2)\mathrm{d}x = \frac{7}{6}.$$

例 3 计算 $\oiint\limits_S \frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$，S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

解 设 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为 S 上单位外法线向量，则 $\cos\alpha = x/r, \cos\beta = y/r, \cos r = z/r$，于是

$$I = \oiint\limits_S \left(\frac{x}{r^3}\cos\alpha + \frac{y}{r^3}\cos\beta + \frac{z}{r^3}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$= \oiint\limits_S \frac{1}{r^2}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\mathrm{d}S = \oiint\limits_S \frac{1}{r^2}\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{a^2}\oiint\limits_S \mathrm{d}S = \frac{1}{a^2}4\pi a^2 = 4\pi.$$

例 4 计算 $\iint\limits_S yx^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + xy^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是 $z = x^2 + y^2$ $(0 \leqslant z \leqslant 1)$ 的外侧.

解 由于曲面关于 z 轴对称，故

$$\iint\limits_S yx^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_S xy^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

又，曲面关于 yoz 平面对称，且 yx^3 是关于 x 的奇函数，所以

$$\iint\limits_S yx^3\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \iint\limits_S xy^3\mathrm{d}x\mathrm{d}x = 0.$$

$$I = 0 + \iint\limits_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^5\mathrm{d}r = -\frac{\pi}{3}.$$

本例依据区域的对称性和函数的奇偶性简化了计算.

例 5 计算

$$I = \iint\limits_S [f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z + [2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，S 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧.

解 设平面法向量为 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则 $\cos\alpha=1/\sqrt{3}$，$\cos\beta=-1/\sqrt{3}$，$\cos r=1/\sqrt{3}$. 于是

$$\begin{aligned}I=&\iint_S\{[f(x,y,z)+x]\cos\alpha+[2f(x,y,z)+y]\cos\beta\\&+[f(x,y,z)+z]\cos\gamma\}\mathrm{d}S\\=&\iint_S f(x,y,z)(\cos\alpha+2\cos\beta+\cos\gamma)\mathrm{d}S\\&+\iint_S(x\cos x+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S\\=&\iint_S f(x,y,z)\cdot 0+\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{3}}(x-y+1-x+y)\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x-1}^0\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

本例含抽象函数 $f(x,y,z)$，不能直接用二重积分、但可利用第一型曲面积分求出解.

例 6 计算 $\oiint_S\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$，$z=2$ 所围立体的外侧.

解 记 S_1 为锥面部分，S_2，S_3 分别为 $z=1$，$z=2$ 部分，在 xoy 面上投影域分别为 D_1，D_2，D_3，则 S_1，S_2 取下侧，S_3 取上侧. 于是

$$\begin{aligned}I=&-\iint_{D_1}\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_2}\frac{e}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\iint_{D_3}\frac{e^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\frac{\mathrm{e}^r}{r}r\mathrm{d}r-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\mathrm{e}}{r}r\mathrm{d}r+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\frac{\mathrm{e}^2}{r}r\mathrm{d}r$$

$$=-2\pi\int_1^2\frac{\mathrm{e}^r}{r}\mathrm{d}r-2\pi\int_0^1\mathrm{e}\mathrm{d}r+2\pi\int_0^2\mathrm{e}^2\mathrm{d}r=2\pi\mathrm{e}^2.$$

第五节　高斯公式与斯托克斯公式

主 要 内 容

1. 高斯公式　设空间区域 V 由分片光滑的双侧封闭曲面 S 所围成，若函数 P,Q,R 在 V 上连续，且有一阶连续偏导数，则有高斯公式

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 取外侧.

2. 斯托克斯(Stokes)公式　设光滑曲面 S 的边界 L 是分段光滑的连续曲线，函数 P,Q,R 在 S 及 L 上连续，且有一阶连续偏导数，则有斯托克斯公式

$$\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z,$$

其中 S 的侧与 L 的方向依右手法则确定.

3. 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 为空间单连通域，若 P,Q,R 是 Ω 上连续函数，且有一阶连续偏导数，则以下四个条件等价：

(1) 对 Ω 内任一光滑封闭曲线，有

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=0;$$

(2) 对Ω内任一分段光滑曲线，曲线积分$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$与路径无关；

(3) Ω 内存在函数 $u(x,y,z)$，使得 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$；

(4) 在 Ω 内成立$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$.

疑难解析

1. 高斯公式有什么意义与用途？

答 高斯公式建立了沿空间闭曲面的曲面积分与三重积分之间的联系，使得对曲面积分的计算可以化为对曲面所围立体上的三重积分的计算. 与牛顿-莱布尼茨公式和格林公式一样，高斯公式体现了一个重要的数学思想——区域内部问题与边界问题的互相转化.

高斯公式是格林公式由平面域到空间域的推广，它不仅对封闭区域上的积分有效，对非封闭区域也可以用添加曲面的方法来使用. 当 V 是空间复连通域时，S 是 V 的外侧与内部小区域边界内侧之和.

2. 斯托克斯公式有什么意义与用途？

答 斯托克斯公式建立了沿空间曲面的曲面积分与沿其边界曲线的曲线积分之间的联系，它也是格林公式的推广.

对在 V 内有一阶连续偏导数的函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$，以下三个命题等价：

(1) $\forall\ S\subset V$，$\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与曲面 S 的形状无关，仅与 S 的边界曲线有关；

(2) 对 V 内任一封闭曲面 S，$\oint\!\!\!\!\oint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$；

(3) 在 V 内恒有$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$.

利用斯托克斯公式和上述命题可以大大简化积分计算并解决许多力学问题.

方法、技巧与典型例题分析

在用高斯公式和斯托克斯公式求解时,首先要验证问题是否满足定理条件,然后再考虑问题的具体条件,如能否利用轮换对称性、区域对称性、函数奇偶性,能否通过拼、凑、拆项来简化计算.

例 1 计算$\oint\!\!\!\oint_S \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$,设:

(1)S 为 $x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$;

(2)S 为不包含原点的光滑闭曲面;

(3)S 为包含原点的光滑闭曲面.

解 (1)因为 $x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$,所以由高斯公式有

$$I=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_V 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{\varepsilon^3}\cdot 3\cdot\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3=4\pi.$$

(2) S 不包含原点,而$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5}$,$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{r^3}-\frac{3y^2}{r^5}$,$\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5}$,即$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$,于是

$$I=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_V 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

(3)S 包含原点,需作半径充分小球面 S_1:$x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$,$S_1\subset S$.则 S 与 S_1 之间区域 V_1,根据题(2),有

$$\iiint_{V_1}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

而根据题(1)，有

$$-\iint_{S_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -4\pi.$$

故 $$I = \iint_{S} = -\iint_{S_1} = -(-4\pi) = 4\pi.$$

这里 S_1 是取内侧.

例 2 计算下列曲面积分：

(1) $$\oiint_{S}\left[\frac{x}{y}f\left(\frac{x}{y}\right) + x^3\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left[f\left(\frac{x}{y}\right) + y^3\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \left[-\frac{z}{y}f\left(\frac{x}{y}\right) + z^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $f(u)$ 有连续导数，S 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ 内侧.

(2) $\iint_{S} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 为锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$ 外侧.

解 (1) $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$，依高斯公式，有

$$\begin{aligned}
I &= -3\iiint_{V}(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= -3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi} r^4\sin\varphi\mathrm{d}r = -6\pi\int_0^{\pi/2}\frac{32}{5}R^5\cos^5\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 6\cdot\frac{32}{5}\pi R^5\cdot\frac{1}{6} = \frac{32}{5}\pi R^5.
\end{aligned}$$

(2) 令 $S_1: z = h(x^2 + y^2 \leqslant h)$，取上侧，则 $S + S_1$ 构成封闭曲面，可用高斯公式. 于是

$$\begin{aligned}
&\iint_{S+S_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\iiint_{V}(x + y + z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\int_0^h\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant z^2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$= 2\int_0^h \pi z^4 \mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}h^4.$$

而 $$\iint_{S_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leqslant h^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = h^2 \cdot \pi h^2 = \pi h^4,$$

故 $$I = \frac{\pi}{2}h^4 - \pi h^4 = -\frac{\pi}{2}h^4.$$

这里，在计算三重积分利用了区域的对称性和函数的奇偶性.

例 3 利用高斯公式计算下列曲面积分：

(1) $\oiint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 为立方体：$0 \leqslant x \leqslant a$，$0 \leqslant y \leqslant a$，$0 \leqslant z \leqslant a$ 外侧；

(2) $\iint_S [x^3\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x}) + y^2\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{y}) + z^2\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{z})]\mathrm{d}S$，$S$ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 上半部分外侧.

解 (1) 因为$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2(x+y+z)$，$S$ 为封闭曲面，故

$$I = 2\iiint_V (x + y + z)\mathrm{d}V = 2\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^a (x + y + z)\mathrm{d}z$$

$$= 2\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a \left(ax + ay + \frac{a^2}{2}\right)\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^a \left(a^2x + \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2}\right)\mathrm{d}x = 3a^4.$$

(2) 补 S_1：$x^2+y^2\leqslant R^2$，$z=0$，取下侧，则 $S+S_1$ 构成封闭曲面，依高斯公式，有

$$\oiint_{S+S_1} = 3\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}V = 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= 6\pi \cdot \frac{R^5}{5}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{6}{5}\pi R^5.$$

而
$$\iint_{S_1} = \iint_{S_1}[0 \cdot x^3 + 0 \cdot y^3 + (-1) \cdot 0]\mathrm{d}S = 0,$$

故
$$I = \oiint_{S+S_1} - \iint_{S_1} = \frac{6}{5}\pi R^5 - 0 = \frac{6}{5}\pi R^5.$$

例 4 计算曲面积分

$$\iint_S (x+y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + [2y+\sin(z+x)]\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$
$$+ (3z + \mathrm{e}^{x+y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

S 为曲面$|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的外侧.

解 因为$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1+2+3=6$,所以

$$I=6\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

对 V:$|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|\leqslant 1$ 作旋转变换:$u=x-y+z,v=y-z+x,w=z-x+y$,S 变成$|u|+|v|+|w|=1$.V 是对称八面体,其第一封限部分由 $u+v+w=1$ 及 $u=0,v=0,w=0$ 所围成,则

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = 1\Big/\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \frac{1}{4},$$

故 $I = 6\iiint_{|u|+|v|+|w|\leqslant 1}\frac{1}{4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = 6\cdot\frac{1}{4}\cdot 8\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = 2.$

例 5 设空间区域 V 由曲面 $z=a^2-x^2-y^2$ 与平面 $z=0$ 所围成,$a>0$.记 V 的表面外侧为 S,体积为 V,证明:

$$\oiint_S x^2yz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xy^2z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z(1+xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = V.$$

证 因为$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1+2xyz$,所以

$$I = \iiint_V(1+2xyz)\mathrm{d}V = V + 2\iiint_V xyz\mathrm{d}V.$$

因为区域关于 yoz 平面对称,而函数是关于 x 的奇函数,所以

$$\iiint_V xyz\mathrm{d}V = 0,$$

故
$$I = V + 0 = V.$$

例 6 用斯托克斯公式计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$，$L$ 为椭圆 $x^2 + y^2 = a^2, x/a + y/b = 1\ (a > 0, b > 0)$，从 x 轴正向看去，取逆时针方向；

(2) $\int_L (y^2 + z^2)\mathrm{d}x + (z^2 + x^2)\mathrm{d}y + (x^2 + y^2)\mathrm{d}z$，$L$ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 的交线，从 z 轴正向看去，取逆时针方向($z \geqslant 0$)。

解 (1)取以 L 为边界的部分平面 $S: x/a + y/b = 1$ 的上侧，则 S 平面法线的方向余弦为 $\cos\alpha = b/\sqrt{a^2+b^2}, \cos\beta = 0, \cos\gamma = a/\sqrt{a^2+b^2}$，于是

$$I = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} \mathrm{d}S = -2\iint_S \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathrm{d}S$$

$$= -2\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint_S \mathrm{d}S = -\frac{2(a+b)}{a}\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{2(a+b)}{a}\pi a^2 = -2\pi a(a+b).$$

(2) 球面法线方向的方向余弦为 $\cos\alpha = (x-2)/2, \cos\beta = y/2, \cos\gamma = z/2$，于是

$$I = 2\iint_S [(y-z)\cos\alpha + (z-x)\cos\beta + (x-y)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

$$= 2\iint_S \left[(y-z)\frac{x-2}{2} + (z-x)\frac{y}{2} + (x-y)\frac{z}{2}\right]\mathrm{d}S$$

$$= 2\iint\limits_{S}(z - y)\mathrm{d}S.$$

由于曲面关于 xoy 平面对称，故 $\iint\limits_{S} y\mathrm{d}S = 0$. 而

$$\iint\limits_{S} z\mathrm{d}S = \iint\limits_{S} 2\cos\gamma \mathrm{d}S = 2\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi.$$

故　$I=4\pi$ (D_{xy}为$(x-1)^2+y^2\leqslant 1$，面积为 1).

例 7　利用斯托克斯公式计算下列曲线积分：

(1) $\int_L y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z$，$L$ 为曲线：$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$，$x^2 + y^2 = Rx$ $(R < 0, z \geqslant 0)$，从 z 轴正向看去，取顺时针方向；

(2) $\int_L (x^2 - yz)\mathrm{d}x + (y^2 - xz)\mathrm{d}y + (z^2 - xy)\mathrm{d}z$，$L$ 是从 $A(0,0,0)$ 到 $B(a,0,h)$ 的螺旋线：$x = a\cos\theta, y = a\sin\theta, z = \dfrac{h}{2x}\theta$.

解　(1) $\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} = -2z, \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} = -2x, \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = -2y$ 均为连续函数，取曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 外侧为 L 部分为 S，因为取顺时针方向，积分前加负号

$$I = -\iint\limits_{S}[-2z\cos\alpha - 2x\cos\beta - 2y\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

$$= 2\iint\limits_{S}[z\cos\alpha + x\cos\beta + y\cos\gamma]\mathrm{d}S,$$

由于 S 关于 xoz 平面对称，则 $\iint\limits_{S} x\cos\beta\mathrm{d}S = 0$.

又 S 在 xoy 平面投影 D_{xy}：$-\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2, 0\leqslant r\leqslant R\cos\theta$，故

$$I = 2\iint\limits_{S}(z\cos\alpha + y\cos\gamma)\mathrm{d}S = 2\iint\limits_{S}(x + y)\cos\gamma\mathrm{d}S$$

$$= 2\iint\limits_{D_{xy}}(x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta} r(\cos\theta + \sin\theta)r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} R^3\cos^4\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}R^3.$$

其中运用了关系式 $z\cos\alpha=z\cdot x/R=x\cdot z/R=x\cos\gamma$.

(2) 将 L 添上直线段 BA 构成封闭曲线. 因为 $\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$,所以积分与曲面无关,只与张它的曲线有关. 由斯托克斯公式,有

$$\int_{L+BA}=0\Rightarrow\int_{\Gamma}=-\int_{BA}=\int_{AB}.$$

直线段 AB 的方程为 $x=a,y=0,0\leqslant z\leqslant h$,所以

$$I=\int_{AB}z^2\mathrm{d}z=\int_0^h z^2\mathrm{d}z=\frac{h^3}{3}.$$

例 8 计算 $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,点 (x_1,y_1,z_1) 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上,点 (x_2,y_2,z_2) 在球面 $x^2+y^2+z^2=b^2$ 上 $(a>0,b>a)$.

解 设 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r$, $\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0$, $\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0$, $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$,故积分与路径无关,只与起点和终点有关,于是

$$I=\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$$
$$=b-a.$$

例 9 计算 $I=\int_A^B P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$,其中 $P=xz+ay^2+bz^2$, $Q=xy+az^2+bx^2$, $R=yz+ax^2+by^2$, $A(0,0,z_0)$, $B(x_1,y_1,0)$. 确定 a,b 值,使积分与路径无关,并求出积分值.

解 由 $\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 得 $a=\frac{1}{2}$, $b=0$. 于是

$$I=\int_A^B(xz+\frac{1}{2}y^2)\mathrm{d}x+(xy+\frac{1}{2}z^2)\mathrm{d}y+(yz+\frac{1}{2}x^2)\mathrm{d}z,$$

取折线 $A(0,0,z_0)\rightarrow A_1(x_1,0,z_0)\rightarrow A_2(x_1,y_1,z_0)\rightarrow B(x_1,y_1,0)$ 为积分路径,有

$$I=\int_{A}^{A_1}+\int_{A_1}^{A_2}+\int_{A_2}^{B}$$

$$=\int_{0}^{x_1}P(x,0,z_0)\mathrm{d}x+\int_{0}^{y_1}Q(x_1,y,z_0)\mathrm{d}y+\int_{z_0}^{0}R(x_1,y_1,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{0}^{x_1}xz_0\mathrm{d}x+\int_{0}^{y_1}(x_1y+\frac{1}{2}z_0^2)\mathrm{d}y+\int_{z_0}^{0}(y_1z+\frac{1}{2}x_1^2)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}x_1^2z_0+\frac{1}{2}x_1y_1^2+\frac{1}{2}z_0^2y_1-\frac{1}{2}z_0^2y_1-\frac{1}{2}x_1^2z_0=\frac{1}{2}x_1y_1^2.$$

例 10 证明:若 S 为封闭的简单曲面,而 $\boldsymbol{n}$ 为 S 的外法线方向,$\boldsymbol{l}$ 为任一固定方向,则 $\oint\!\!\oint_S\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\mathrm{d}S=0$.

证 设 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$,$\boldsymbol{l}_0=\frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|}=(\cos\alpha_0,\cos\beta_0,\cos\gamma_0)$,其中 $\cos\alpha_0,\cos\beta_0,\cos\gamma_0$ 为常量. 由于

$$\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{l}=\cos\alpha_0\cos\alpha+\cos\beta_0\cos\beta+\cos\gamma_0\cos\gamma,$$

故
$$\oint\!\!\oint_S\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\mathrm{d}S$$

$$=\oint\!\!\oint_S(\cos\alpha_0\cos\alpha+\cos\beta_0\cos\beta+\cos\gamma_0\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\oint\!\!\oint_S\cos\alpha_0\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\cos\beta_0\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\cos\gamma_0\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{由高斯公式}}\iiint_V\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha_0+\frac{\partial}{\partial y}\cos\beta_0+\frac{\partial}{\partial z}\gamma_0\right)\mathrm{d}V=\iiint_V0\mathrm{d}V=0.$$

例 11 设 $u(x,y,z)$ 在闭区域 V 上有二阶连续偏导数,记 $\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$,证明:

$$\oint\!\!\oint_S u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}V+\iiint_V u\Delta u\mathrm{d}V,$$

其中 S 是 V 的边界曲面,$\frac{\partial u}{\partial n}$ 为 $u(x,y,z)$ 沿 S 外法线方向的方向导数.

证 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则

$$\oiint_S u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\oiint_S u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$=\oiint_S u\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+u\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+u\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}V$$

$$=\iiint_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}V+\iiint_V u\Delta u\mathrm{d}V.$$

例 12 利用斯托克斯公式化$\iint_S \mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$为曲线积分，$\boldsymbol{F}=y^2\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$，$S$为上半球面$z=(1-x^2-y^2)^{1/2}$的上侧，$\boldsymbol{n}$为$S$的单位法向量.

解 $\mathbf{rot}\boldsymbol{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$，

S的边界曲线为$x^2+y^2=1,z=0$，则由斯托克斯公式，有

$$I=\iint_S \mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\oint_S y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}[\sin^2t(-\sin t)+\cos^2t\sin t]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}(1-2\cos^2t)\mathrm{d}\cos t=0.$$

例 13 设S为包围有界物体V的简单光滑曲面，$u(x,y,z)$在$V+S$上连续，并有二阶连续偏导数，$\boldsymbol{n}$为S的外法线向量，证明：

$$\oiint_S u\,\mathbf{grad}u\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_V(\mathbf{grad}u)^2\mathrm{d}V+\iiint_V u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}V.$$

证 令$\boldsymbol{F}=u\,\mathbf{grad}u$，则因为

$$\mathbf{grad}u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\mathrm{div}[u\,\mathbf{grad}u]=\mathrm{div}\left[u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$=u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

$$=u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+(\mathbf{grad}u)^2,$$

所以 $$\oint\!\!\!\oint_S u\,\mathbf{grad}u\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\oint\!\!\!\oint_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_V\mathrm{div}\boldsymbol{F}\mathrm{d}V$$

$$=\iiint_V(\mathbf{grad}u)^2\mathrm{d}V+\iiint_V u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}V.$$

例 14 设 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 均为连续函数，S 为光滑曲面，面积为 S，M 是 $\sqrt{P^2+Q^2+R^2}$ 在 S 上的最大值，证明：$\left|\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant MS$.

证 $$\left|\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$$

$$=\left|\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S\right|$$

$$\leqslant\iint_S|P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma|\mathrm{d}S$$

$$=\iint_S|(P,Q,R)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)|\mathrm{d}S=\iint_S|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_0|\mathrm{d}S$$

$$\leqslant\iint_S|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{n}_0|\mathrm{d}S=\iint_S|\boldsymbol{F}|\mathrm{d}S=\iint_S\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\mathrm{d}S$$

$$\leqslant M\iint_S\mathrm{d}S=MS.$$

例 15 有密度为 μ 的空间流体，流速 $\boldsymbol{v}=xz^2\boldsymbol{i}+yx^2\boldsymbol{j}+zy^2\boldsymbol{k}$，求在单位时间内流过曲面 $S:x^2+y^2+z^2=2z$ 的流量 Φ（流向外

侧)和沿曲线 $L: x^2+y^2+z^2=2z, z=1$ 的环流量 Γ(从 z 轴正向量看是逆时针方向).

解 球面 S 的球面坐标方程为 $r=2\cos\varphi$,故

$$\Phi = \oiint_S xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yx^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + zy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{(由高斯公式)}$$

$$= \iiint_V (z^2+x^2+y^2)\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi} r^4\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\cdot\frac{32}{5}\int_0^{\pi/2}\cos^5\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{32}{15}\pi.$$

曲线 L 为平面 $z=1$ 上的圆周 $x^2+y^2=1$,故

$$\Gamma = \oint_L xz^2\mathrm{d}x + yx^2\mathrm{d}y + zy^2\mathrm{d}z$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz^2 & yx^2 & zy^2 \end{vmatrix} \text{(由斯托克斯公式)}$$

$$= 2\iint_S yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_S xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \text{(由区域对称性和函数奇偶性)}.$$

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数学分析 内容、方法与技巧 （下册）
作者＝孙清华 孙昊
页数＝４７７
ＳＳ号＝１１２１９８４３
出版日期＝２００３年１１月第１版

前言

目录